

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

75. BAND, 5. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 13. APRIL 1961)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1961

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechslungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole $\circ$ und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweide 21b.

Springer-Verlag OHG

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83 319
Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61 723
Göttingen, Weender Straße 60.

75. Band

Inhalt

5. (Schluß-)Heft

Seite

- Ewald, G., Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume und nicht-desarguessche räumliche Strukturen über beliebigen Ternärkörpern 395
- Ewald, G., Translationsgruppen in verallgemeinerten dreidimensionalen projektiven Räumen 419
- Thimm, W., Über starke und schwache Holomorphie auf analytischen Mengen. (Führeridealgarbe und adjungierte Idealgarbe) 426
- Ribenboim, P., Sur la théorie du prolongement des valuations de Krull 499

Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume und nichtdesarguessche räumliche Strukturen über beliebigen Ternärkörpern*)

Von

GÜNTER EWALD

Einleitung

Mit der vorliegenden Arbeit beginnen wir eine Untersuchung über verallgemeinerte projektive Raumgeometrien, die einem doppelten Zweck dient:

1. Wir geben Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume mit Hilfe schwacher Inzidenzvoraussetzungen an. Diese Kennzeichnungen werfen nicht nur neues Licht auf die Grundlagen der projektiven Raumgeometrie, sie sind auch für die Lösung anderer Probleme bedeutsam. Wir zeigen dies in einer folgenden Arbeit [1] am Beispiel eines Problems aus der Theorie der Möbius-Ebenen. (Diesem kommt wiederum eine Bedeutung für die Entwicklung nichteuklidischer Geometrien über beliebigen Schiefkörpern zu.)

2. Wir dehnen die Geometrie nichtdesarguesscher projektiver Ebenen, die in den letzten Jahren große Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat (vgl. [4]), in den Raum aus (die Ebenen eines drei- oder höherdimensionalen projektiven Raumes sind bekanntlich alle desarguessch)¹⁾. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die Theorie der Ternärkörper²⁾ von Interesse. Es lassen sich Ternärkörpereigenschaften statt durch ebene Schließungssätze, wie es aus der Theorie der projektiven Ebenen bekannt ist, durch einfache Schnitteigenschaften von Ebenen im Raum charakterisieren. Man erhält auf diese Weise neuartige Zusammenhänge zwischen geometrischen und algebraischen Sachverhalten.

Verbandstheoretisch gesehen stellen unsere Strukturen eine Klasse dualer Austauschverbände dar. Jedoch soll hierauf erst an anderer Stelle eingegangen werden³⁾.

*) Habilitationsschrift Mainz 1960, I. Teil (vgl. folgende Arbeit).

¹⁾ E. SPERNER [5] hat unabhängig vom Verfasser verallgemeinerte affine Räume angegeben, die für affine Ebenen einen ähnlichen Zweck erfüllen. Dies stellte sich auf dem Kongreß "On the algebraical and topological foundations of geometry" 1959 in Utrecht heraus, wo beide Verfasser über ihre Arbeiten vorgetragen haben (vgl. [2]).

²⁾ Ein Ternärkörper ("ternary ring" bei HALL [3]) ist eine algebraische Struktur, durch die eine beliebig vorgegebene projektive Ebene koordinatenmäßig beschrieben wird. Vgl. Abschnitt 3. — Hinsichtlich der Bezeichnungen lehnen wir uns an das Buch „Projektive Ebenen“ [4] von G. PICKERT an.

³⁾ Während für die Probleme der vorliegenden Arbeit höhere Dimensionen von geringem Interesse sind, sollen dort beliebige Dimensionen zugelassen werden.

1. Ergebnisse

Die geometrischen Strukturen, mit denen wir uns beschäftigen, ordnen sich der folgenden Definition unter:

$\mathfrak{P} = \{A, B, \dots\}$ und $\mathfrak{E} = \{\alpha, \beta, \dots\}$ seien zwei Mengen von Dingen; die Elemente der ersteren nennen wir *Punkte*, die der letzteren *Ebenen*. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ sei eine (nicht notwendig echte) Teilmenge der Punkte; ihre Elemente sollen auch *Grundpunkte* heißen. n sei die Mächtigkeit von $\mathfrak{A}$. Zwischen Punkten und Ebenen sei eine Inzidenzbeziehung („ $\in$ “) erklärt. Das Quadrupel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathfrak{E}, \in)$ heiße ein *projektives Gefüge*, auch *n-Gefüge* oder kurz *Gefüge* $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$, wenn es folgende Eigenschaften besitzt⁴⁾:

- (1) *Auf jeder Ebene liegt mindestens ein Grundpunkt.*
- (2) *Durch einen Grundpunkt und zwei von ihm verschiedene Punkte geht stets eine Ebene.*
- (3) *Drei Ebenen enthalten stets einen gemeinsamen Punkt.*
- (4) *Enthalten drei verschiedene Ebenen zwei gemeinsame Punkte, so besitzen sie zu je zweien den gleichen Durchschnitt.*
- (5) *Durch jeden Punkt verlaufen drei Ebenen, die nur diesen Punkt gemein haben. Es gibt zwei Grundpunkte und drei weitere Punkte, so daß keine vier dieser fünf Punkte komplanar sind⁵⁾.*

Als Minimalmodell findet man ein 2-Gefüge, das aus dem Fano-Raum durch Weglassung eines Punktes entsteht. — Die Gefüge $\mathcal{G}(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ sind genau die projektiven dreidimensionalen Räume⁶⁾.

Die Schnittgebilde verschiedener Ebenen bezeichnen wir als *Geraden* $a, b, \dots$. Nach (5) und (3) enthält jede Gerade Punkte.

$(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}', \mathfrak{E}', \in')$ sei ein Gefüge, das folgendermaßen aus dem Gefüge $(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathfrak{E}, \in)$ entsteht: Falls sämtliche Grundpunkte auf ein und derselben Geraden g liegen, sollen zu $\mathfrak{A}$ eventuell nicht in $\mathfrak{P}$ gelegene Grundpunkte hinzugefügt werden und ebenfalls mit g inzidieren. Andernfalls sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{P}$. In beiden Fällen gelte $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cup \mathfrak{A}'$ (im letzteren Fall also $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$). Ferner sei $A \in \alpha$ bei $A \in \mathfrak{P}$, $\alpha \in \mathfrak{E}$ gleichbedeutend mit $A \in' \alpha$. Dies führt auch zu $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}'$. Wir nennen dann $\mathcal{G} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathfrak{E}, \in)$ *Subgefüge* von $\mathcal{G}' = (\mathfrak{A}', \mathfrak{P}', \mathfrak{E}', \in')$, im Falle, daß $\mathfrak{A}$ echte Untermenge von $\mathfrak{A}'$ ist, auch *echtes* Subgefüge. Ein Gefüge heiße *maximal*, wenn es in keinem Gefüge als echtes Subgefüge enthalten ist.

⁴⁾ Wir umschreiben die Inzidenzbeziehung in der üblichen Weise durch Begriffe wie „liegen auf“, „komplanar“, „schneiden“ usw. Ferner identifizieren wir gelegentlich die Ebenen mit den Mengen der auf ihnen gelegenen Punkten (was bereits durch die Benutzung des Symbols „ $\in$ “ angedeutet wird). — Entsprechendes gilt für die später eingeführten Geraden.

⁵⁾ Es handelt sich bei den n -Gefügen um Systeme von (mindestens zwei) Ebenenbündeln, ähnlich wie bei den (ebenen) n -Gewebe um Systeme von Geradenbüscheln (bei endlichem n). — Denkt man sich einen stets ruhenden „idealen“ Beobachter, so erkennt dieser im streng geometrisch-optischen Sinn zunächst nur die Struktur eines 2-Gefüges (mit den Augen als Grundpunkten). Ebenen, die keines seiner Augen treffen, muß er sich erst indirekt aufbauen.

⁶⁾ Läßt man in (1) bis (5) die Silbe „Grund-“ weg, so erhält man im wesentlichen ein Axiomensystem der dreidimensionalen projektiven Geometrie von A. WINTERITZ [7].

als Ebene eines projektiven Gefüges aufgefaßt werden kann. (Es lassen sich sogar zwei beliebige projektive Ebenen mit gleichmächtigen Geraden in ein und dasselbe Gefüge einbetten).

Die im folgenden Satz III auftretenden Links- bzw. Rechtsquasikörper sind aus der Theorie der projektiven Ebenen bekannte algebraische Bereiche ($T = T'$; s. Abschnitt 5; vgl. PICKERT [4]). $\mathbb{R}_0$ sei der „Kern“ eines Linksquasikörpers $\mathbb{R}$, der entsprechend dem Kern eines Rechtsquasikörpers gebildet wird (s. Abschnitt 5; $\mathbb{R}_0$ ist ein Schiefkörper).

SATZ III. Für ein projektives Gefüge $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ ist Subgefüge eines Gefüges $\mathcal{G}'(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}')$, wo $\mathfrak{A}'$ die in der k -ten Zeile der folgenden Tabelle genannten Eigenschaften besitzt⁷⁾.

b) $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ läßt sich in der oben erläuterten Weise durch einen Koordinatenternärkörper $\mathbb{R}$ der in der k -ten Zeile aufgeführten Art beschreiben ($k = 1, \dots, 4$):

	$\mathfrak{A}'$	$\mathbb{R}$
1.	$ \mathfrak{A}' \geq 3$; alle $A \in \mathfrak{A}'$ kollinear	Linksquasikörper
2.	$ \mathfrak{A}' > 3$; alle $A \in \mathfrak{A}'$ kollinear	Linksquasikörper mit $ \mathbb{R}_0 \geq 3$
3.	$ \mathfrak{A}' \geq 3$; nicht alle $A \in \mathfrak{A}'$ kollinear	Assoziativer Rechtsquasikörper
4.	$ \mathfrak{A}' > 3$; nicht alle $A \in \mathfrak{A}'$ kollinear	Schiefkörper.

Hinsichtlich der 2. Tabellenzeile von Satz III erhalten wir folgende genauere Aussage: Fügt man zu $\mathbb{R}_0$ ein Element „ ∞ “ hinzu und ist $\mathcal{G}'(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}')$ maximal, dann lassen sich die Grundpunkte von $\mathcal{G}'(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}')$ eindeutig den Elementen von $\mathbb{R}_0 \cup \{\infty\}$ zuordnen. — Darin steckt eine einfache geometrische Deutung des Kerns eines Linksquasikörpers. (Zum Beweis von Satz III s. unten (6.5) und (7.2)).

Aus Satz III kann man Schlüsse der folgenden Art ziehen: Wird ein 3-Gefüge mit nichtkollinearen Grundpunkten durch einen assoziativen Rechtsquasikörper, der kein Schiefkörper ist, beschrieben, dann ist es maximal. Beherrscht man allgemein die Koordinatenbereiche eines Gefüges, dann beherrscht man auch die maximalen Gefüge, in denen es als Subgefüge enthalten ist.

Die Beziehungen zwischen Gefüge- und Ternärkörpereigenschaften in Satz III lassen sich weiter ausbauen. Wir beschränken uns jedoch im wesentlichen auf die in Satz III angeführten wichtigsten Stufen (Ausnahmen in Abschnitt 5).

Es sei noch besonders erwähnt, daß wir die definierenden Rechengesetze der in Satz III rechts stehenden Ternärkörper im allgemeinen direkt aus den Ebenengleichungen herleiten, nicht auf dem Umweg über ebene Schließungssätze. Gerade in diesem Verfahren werden neue Zusammenhänge zwischen geometrischen und algebraischen Tatsachen sichtbar.

⁷⁾ $|\mathfrak{M}|$ bedeute die Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{M}$.

2. Eigenschaften der projektiven Gefüge

Gegeben sei ein n -Gefüge $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$. Wir nennen die Ebenen, die den Grundpunkt $A \in \mathfrak{A}$, aber nicht alle Grundpunkte enthalten, A -Ebenen. Ebenen, die durch sämtliche Grundpunkte verlaufen, sollen $\mathfrak{A}$ -Ebenen, im Falle eines 2-Gefüges mit $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2\}$ auch $A_1 A_2$ -Ebenen heißen.

Die kleinsten Subgefüge eines Gefüges sind 2-Gefüge. Ferner sind unter den 2-Gefügen die Gefüge allgemeinsten Art zu suchen, weil die Mächtigkeit von $\mathfrak{A}$, wie wir sehen werden, auf die Einengung der Struktur eines Gefüges entscheidenden Einfluß nimmt (vgl. den Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$). Wir werden es daher oft mit 2-Gefügen zu tun haben. — Es gilt:

(2.1) *Jedes Gefüge enthält mindestens ein 2-Gefüge als Subgefüge.*

BEWEIS. Man greife zwei Grundpunkte A_1, A_2 heraus und entferne alle von A_1, A_2 verschiedenen Punkte der Geraden $A_1 A_2$ ⁸⁾ aus dem Gefüge. Ferner bezeichne man nur noch diejenigen Ebenen als Ebenen, die einen der Punkte A_1, A_2 enthalten. Dann bleibt ein 2-Gefüge übrig, das Subgefüge des gegebenen Gefüges ist.

Wir beweisen jetzt einige elementare Gefügeeigenschaften.

(2.2) *Zwei verschiedene Punkte liegen auf höchstens einer Geraden. Drei nicht-kollineare Punkte inzidieren mit höchstens einer Ebene.*

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt aus (4), die zweite aus der Definition der Geraden.

(2.3) *Jede Ebene enthält mindestens drei nichtkollineare Punkte und ist durch die Menge ihrer Punkte eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Wegen (2.2) genügt es, die Existenz dreier nichtkollinearer Punkte auf einer beliebig vorgegebenen Ebene α nachzuweisen. Seien A_1, A_2, P, Q, R Punkte der in (5) genannten Art, wo A_1, A_2 Grundpunkte darstellen. Verbindet man A_1 bzw. A_2 je mit allen Paaren der restlichen vier Punkte gemäß (2) durch Ebenen, so erhält man 9 verschiedene Ebenen. Je zwei dieser Ebenen bestimmen eine Verbindungsgerade zweier der fünf genannten Punkte. Enthält α sowohl A_1 wie A_2 , dann schneidet nach (3) etwa PQ die Ebene α in einem Punkt S . Wäre S mit A_1, A_2 kollinear, so lägen wegen (4) P, Q mit A_1, A_2 in einer Ebene. — Liegt A_i nicht auf α , dann schneiden die Geraden $A_i P, A_i Q, A_i R$ die gesuchten Punkte aus α aus ($i=1$ oder 2).

(2.4) *Auf jeder Geraden, sofern sie im Falle $n=2$ nicht beide Grundpunkte enthält, liegen mindestens drei Punkte. Es gibt zwei Geraden ohne Schnittpunkt.*

BEWEIS. Eine beliebige Gerade hat nach (3) mit jeder der im Beweis von (2.3) genannten Ebenen einen gemeinsamen Punkt. Sofern nicht A_1, A_2 die einzigen Grundpunkte sind und die Gerade mit $A_1 A_2$ zusammenfällt, gibt es drei verschiedene Punkte dieser Art. — Die Geraden $A_i P$ und QR schneiden sich nicht, da sonst A_i, P, Q, R komplanar wären.

⁸⁾ Mit $\overline{PQ}$ bezeichnen wir allgemein bei $P \neq Q$ die Verbindungsgerade von P und Q (falls vorhanden). Existiert der Schnittpunkt zweier Geraden a, b , dann bezeichnen wir ihn mit ab .

- (2.5) *Ein Grundpunkt bestimmt mit jedem von ihm verschiedenen Punkt genau eine Gerade. Zwei beliebige verschiedene Punkte, die nicht gemeinsam in einer $\mathfrak{A}$ -Ebene liegen, sind ebenfalls durch genau eine Gerade verbunden.*

BEWEIS. Ist $S \neq A$ und ist A ein Grundpunkt, dann lege man durch A, S und jeden der im Beweis von (2.3) genannten Punkte je eine Ebene (Existenz nach (2)). Zwei dieser Ebenen sind gewiß verschieden und bestimmen eine Verbindungsgerade von A, S . — Liegen S, T nicht in einer $\mathfrak{A}$ -Ebene (sofern eine solche überhaupt vorhanden ist), dann gibt es zwei Grundpunkte A, A' , so daß A, S, T und A', S, T verschiedene Ebenen bestimmen. Diese definieren eine Verbindungsgerade von S und T . — In beiden Fällen ist die Verbindungsgerade wegen (4) eindeutig bestimmt.

Aus (3) und (4) ergibt sich schließlich:

- (2.6) *Eine Gerade trifft jede Ebene, in der sie nicht liegt, in genau einem Punkt.*

Der folgende Satz gibt eine allgemeine Strukturaussage über Gefüge:

- (2.7) *Alle A -Ebenen ($A \in \mathfrak{A}$ beliebig) sind projektive Ebenen. Je zwei A -Ebenen sind (bei gleichem A) isomorph⁹⁾. Im Falle $n \geq 3$ sind auch die A - zu den A' -Ebenen ($A \neq A'$ beliebig) isomorph.*

BEWEIS. Sei α die angenommene A -Ebene und sei $A' \notin \alpha$. Je zwei Punkte von α bestimmen dann mit A' eine Ebene, deren Schnittgerade mit α eine Verbindungsgerade der beiden Punkte darstellt. Wegen (2.2) ist diese Gerade eindeutig festgelegt. (3) garantiert, daß sich je zwei Geraden von α schneiden. Nach (2.4) liegen auf jeder Geraden von α mindestens drei Punkte und nach (2.3) enthält α drei nichtkollineare Punkte. α ist daher eine projektive Ebene.

Ist α' eine zweite A -Ebene und ist A' ein Grundpunkt mit $A' \notin \alpha'$, so kann man α von A' aus gemäß (2.4) und der Definition der Geraden auf α' projizieren, so daß diese Projektion eine Isomorphie der beiden Ebenen ergibt. Ist $A' \in \alpha'$, so existiert (nach Definition der A -Ebenen) ein A'' mit $A'' \notin \alpha'$. Ist $A'' \notin \alpha$, so projizieren wir α von A'' aus auf α' . Gilt aber $A'' \in \alpha$, so finden wir mit Hilfe von (5) eine A -Ebene α'' mit $A', A'' \notin \alpha''$ und projizieren erst α von A' aus auf α'' und dann α'' von A'' aus auf α' . — Durch sukzessives Projizieren dieser Art folgt im Falle $n \geq 3$ auch die Isomorphie der A - und der A' -Ebenen $A \neq A'$.

- (2.8) *Je zwei Geraden eines Gefüges, von denen keine sämtliche Grundpunkte enthält, besitzen die gleiche Anzahl von Punkten.*

BEWEIS. Seien a, a' beliebige Geraden der genannten Art. Nach Annahme folgt, daß es durch a eine A -Ebene α und durch a' eine A' -Ebene α' gibt (für passende A, A'). Nach (2.7) sind α und α' projektive Ebenen. Bei $\alpha \neq \alpha'$ schneiden sie sich in einer Geraden. Sowohl in diesem Fall wie bei $\alpha = \alpha'$ folgt die Behauptung daraus, daß alle Geraden einer projektiven Ebene gleichmächtig sind.

⁹⁾ Zwei projektive Ebenen heißen isomorph, wenn es eine eineindeutige Abbildung ihrer Punkte aufeinander gibt, die Geraden in Geraden überführt.

Wir zeichnen jetzt in einem 2-Gefüge $\mathcal{G}$ eine $A_1 A_2$ -Ebene ω als *uneigentliche Ebene* aus und nennen die in ω gelegenen Punkte und Geraden ebenfalls uneigentlich. Die übrigen Punkte, Geraden und Ebenen sollen *eigentlich* heißen; jedoch lassen wir den Zusatz „eigentlich“ meist weg. Uneigentliche Punkte bezeichnen wir auch als *Richtungen*. Zwei eigentliche Geraden bzw. zwei eigentliche Ebenen bzw. eine eigentliche Gerade und eine eigentliche Ebene heißen *parallel*, wenn sie entweder miteinander inzidieren oder wenn ihr Durchschnitt nichtleer und ganz in ω enthalten ist. Diese Parallelität stellt offenbar sowohl auf der Menge der Geraden wie auf der Menge der Ebenen eine Äquivalenzrelation dar. — Auf diese Weise entsteht aus $\mathcal{G}$ ein verallgemeinerter affiner Raum; wir nennen ihn (ein zu $\mathcal{G}$ gehöriges) *affines Gefüge* $\mathcal{G}_\omega$. Die Bezeichnung „*A-Ebene*“ behält auch für $\mathcal{G}_\omega$ ihren Sinn. — In $\mathcal{G}_\omega$ gelten folgende Sätze:

(2.9) *Durch eine vorgegebene Gerade gibt es in Richtung eines nicht auf der Geraden (als Richtung) gelegenen Grundpunktes genau eine Ebene.*

BEWEIS. Sind P, Q zwei verschiedene Punkte der Gerade und ist A_1 der angenommene Grundpunkt, dann sind P, Q, A_1 nicht kollinear. Daraus folgt nach (2), (2.2) und der Definition der Geraden die Behauptung.

(2.10) *Zu einer Ebene gibt es durch einen vorgegebenen Punkt stets genau eine parallele Ebene.*

BEWEIS. Die uneigentliche Schnittgerade der gegebenen Ebene und ω enthält einen Grundpunkt und bestimmt mit dem gegebenen Punkt, wieder nach (2) und (2.3), eine und nur eine Ebene. Dies ist die gesuchte Ebene.

(2.11) *Eine Gerade und eine Ebene sind entweder parallel oder schneiden sich in einem eigentlichen Punkt. Zwei Ebenen sind entweder parallel oder schneiden sich in einer eigentlichen Geraden.*

BEWEIS. Der erste Teil der Behauptung folgt aus (2.6), der zweite aus der Definition der Geraden.

Aus einem späteren Satz wird hervorgehen, daß die Gefügeebenen eines 2-Gefüges keinem ebenen Schließungssatz zu genügen brauchen (s. unten Korollar zu Satz 2, wo man etwa freie projektive Ebenen zugrundelege). Anders verhält es sich mit dem Desarguesschen Satz im Raum:

(DR) Sind die Dreiecke PQR und $P'Q'R'$ perspektiv, aber nicht komplanar, dann sind die Punkte $(PQ)(P'Q')=S$; $(PR)(P'R')=T$ und $(QR)(Q'R')$ kollinear (Fig. 2).

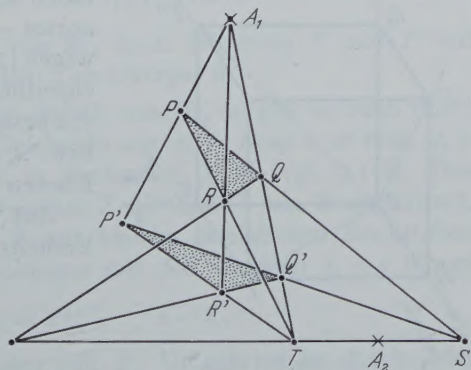


Fig. 2

Es gilt, wenn man die Gerade ST als Achse bezeichnet und das Zentrum wie üblich definiert:

SATZ 1. *Der Desarguessche Satz im Raum (DR) gilt in einem 2-Gefüge stets dann, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist (A_1, A_2 die Grundpunkte des 2-Gefüges):*

- a) A_1 ist Zentrum, A_2 liegt auf der Achse,
- b) A_2 ist Zentrum, A_1 liegt auf der Achse.

BEWEIS. Man kann die üblichen projektiven Schlußweisen anwenden (s. z.B. HALL [3], S. 232), da alle hierbei benötigten Ebenen existieren (vgl. Fig. 2).

3. Einführung von Koordinaten

Nach (2.1) gibt es zu jedem Gefüge ein Subgefüge, das 2-Gefüge ist. Ferner werden wir sehen, daß die Gefüge durch die gleichen algebraischen Bereiche wie ihre Subgefüge beschrieben werden. Für eine allgemeine gegenseitige Zuordnung von Gefügen und Koordinatenstrukturen genügt es daher, 2-Gefüge zu betrachten. Erst im 5. Abschnitt dehnen wir die algebraische Beschreibung der 2-Gefüge auf beliebige Gefüge aus. Man kann sich hinterher auch die Koordinateneinführung so vorgenommen denken, wie es in Abschnitt 1 erläutert ist.

Seien A_1, A_2 die Grundpunkte eines 2-Gefüges $\mathcal{G}$. In $\mathcal{G}_\omega$ (ω irgendeine $A_1 A_2$ -Ebene) wählen wir einen (eigentlichen) Punkt O und in ω einen (uneigentlichen) Punkt $U \notin A_1 A_2$ fest aus. Wir setzen $x = OU$; $y = OA_1$; $z = OA_2$. Diese Geraden x, y, z — wir nennen sie *Koordinatenachsen* — liegen nicht in einer Ebene, da diese wegen (2.2) mit ω zusammenfielen, O also nicht eigentlich wäre. Die durch x, y bzw. x, z bzw. y, z bestimmte Ebene bezeichnen wir als x, y - bzw. x, z - bzw. y, z -Ebene; wir nennen diese Ebenen auch *Koordinatenebenen*.

Auf x, y, z wählen wir bzw. (eigentliche) Einheitspunkte E_1, E_2, E_3 , alle $\neq O$, und setzen

$$\begin{aligned} E &= (E_1 A_1) (E_2 U) \\ E' &= (E_1 A_2) (E_3 U) \\ E'' &= (E_2 A_2) (E_3 A_1) \quad (\text{Fig. 3}). \end{aligned}$$

Wir erinnern an die Definition eines *Ternärkörpers*: (Bezeichnung nach PICKERT [4], S. 36; vgl. HALL [3]): Man versteht darunter eine Menge $\mathfrak{R}$ von Dingen $u, v, \dots$, für die eine ternäre Verknüpfung $T(u, v, w)$ überall definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt:

- (T 1) Es gibt $0, 1 \in \mathfrak{R}$, so daß $T(u, 0, v) = T(0, u, v) = v$ und $T(u, 1, 0) = T(1, u, 0) = u$ für beliebige $u, v \in \mathfrak{R}$ ist.
- (T 2) Zu $x, y, u \in \mathfrak{R}$ gibt es stets genau ein $v \in \mathfrak{R}$, so daß $y = T(u, x, v)$ ist.

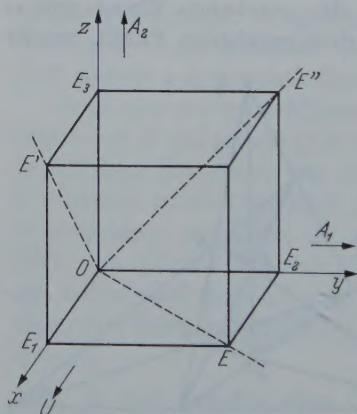


Fig. 3

- (T 3) Zu $u, u', v, v' \in \mathfrak{R}$ mit $u \neq u'$ gibt es genau ein $x \in \mathfrak{R}$, so daß $T(u, x, v) = T(u', x, v')$ ist.
- (T 4) Zu $x, x', y, y' \in \mathfrak{R}$ mit $x \neq x', y \neq y'$ existieren (eindeutig bestimmte¹⁰⁾) Elemente $u, v \in \mathfrak{R}$ mit $y = T(u, x, v), y' = T(u, x', v)$.

Für unsere Zwecke ist es nützlich, folgende Verallgemeinerung des Ternärkörperbegriffes einzuführen: Ist $\mathfrak{R}$ eine Menge, deren Elemente hinsichtlich zweier (nicht notwendig verschiedener) ternärer Verknüpfungen T, T' je einen Ternärkörper bildet und stimmen 0- und 1-Element für beide Verknüpfungen überein, dann nennen wir $\mathfrak{R}$ einen *zweifachen Ternärkörper*. Im Falle $T = T'$ erhalten wir wieder einen gewöhnlichen Ternärkörper.

Die x, y - und die x, z -Ebene sind nach (2.7) in $\mathcal{G}$ projektive Ebenen, also in $\mathcal{G}_\omega$ affine Ebenen. In diesen führen wir (in der Bezeichnungsweise von G. PICKERT [4], S. 36) die auf O, U, A_1, E bzw. O, U, A_2, E' bezogenen Ternärkörper $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_2$ ein. Man identifiziert bei der Definition von $\mathfrak{R}_1$ die Elemente von $\mathfrak{R}_1$ mit den (eigentlichen) Punkten von y , entsprechend die Elemente von $\mathfrak{R}_2$ mit den (eigentlichen) Punkten von z . Durch folgende Abbildungen überträgt man die Elemente von $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_2$ auch auf die x -Achse (vgl. Fig. 5):

$$y \xrightarrow{\varrho} x: Y^e = ([YU] (OE)] A_1) (OU) \text{ bei } Y \in y;$$

$$z \xrightarrow{\sigma} x: Z^\sigma = ([ZU] (OE')] A_2) (OU) \text{ bei } Z \in z.$$

Dann ergibt $\varrho \sigma^{-1}$ eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{R}_1$ auf $\mathfrak{R}_2$. Ist T_1 die ternäre Verknüpfung von $\mathfrak{R}_1$, dann setzen wir für A, X, B auf der y -Achse:

$$T'(A^{\varrho\sigma^{-1}}, X^{\varrho\sigma^{-1}}, B^{\varrho\sigma^{-1}}) = T_1(A, X, B).$$

Ist T die ternäre Verknüpfung von $\mathfrak{R}_2$, dann definieren T und T' auf den Elementen von $\mathfrak{R}_2$ einen zweifachen Ternärkörper $\mathfrak{R}$.

Ist nun P irgendein (eigentlicher) Punkt von $\mathcal{G}_\omega$, so gibt es nach (2.10) durch P eindeutig bestimmte Parallelebenen zur x, y - bzw. x, z - bzw. y, z -Ebene. Diese schneiden z, y, x bzw. in Punkten Z, Y, X (vgl. (2.14)). Den Punkten Z, Y, X sind aber drei Elemente $Z, Y^{\varrho\sigma^{-1}}, X^{\varrho\sigma^{-1}}$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Wir bezeichnen die Elemente von $\mathfrak{R}$ mit kleinen lateinischen Buchstaben und setzen (was kaum zu Verwechslungen mit den Geraden x, y, z führen dürfte):

$$x = X^{\varrho\sigma^{-1}}, \quad y = Y^{\varrho\sigma^{-1}}, \quad z = Z.$$

Wir nennen x, y, z die *Koordinaten* von P . Umgekehrt ist durch jedes Tripel $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ein Punkt P bestimmt, der x, y, z als Koordinaten besitzt. Wir erhalten also eine eindeutige Abbildung zwischen den Punkten einerseits und den Elementen von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ andererseits.

In der x, y - bzw. der x, z -Ebene haben wir bzw. folgende Geradengleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(E 1)} \quad y = T'(a_1, x, b_1) \\ \text{(E 2)} \quad z = T(a_2, x, b_2) \end{array} \right\} \text{ oder } \text{(E*)} \quad x = c$$

¹⁰⁾ Die Eindeutigkeit läßt sich beweisen.

mit $a_1, b_1, a_2, b_2, c \in \mathfrak{K}$. In $\mathcal{G}_\omega$ interpretiert stellen diese Gleichungen Ebenengleichungen dar. Da wegen (2.11) jede Ebene mindestens eine Koordinatenebene in einer Geraden schneidet, werden auf diese Weise allen Ebenen von $\mathcal{G}_\omega$ Gleichungen zugeordnet.

Mit Hilfe dieser Ebenengleichungen lassen sich auch die Geraden algebraisch repräsentieren: Sei zuerst die Gerade a nicht zur y, z -Ebene parallel. Dann bestimmt a nach (2.9) mit A_1 und A_2 je eine Ebene. Diese Ebenen sind verschieden und werden durch Gleichungen (E 1) bzw. (E 2) dargestellt. Wir ordnen a auf diese Weise ein Gleichungspaar

$$(G\ 1) \quad \begin{cases} y = T'(a_1, x, b_1) \\ z = T(a_2, x, b_2) \end{cases}$$

zu. Jedes Gleichungspaar (G 1) stellt umgekehrt eine Gerade dar, weil die beiden in (G 1) aufgeführten Ebenengleichungen verschiedene Ebenen repräsentieren und diese sich in einer Geraden schneiden.

Eine in einer $A_1 A_2$ -Ebene gelegene Gerade enthält entweder die Richtung A_1 oder die Richtung A_2 . Wir ordnen ihr dementsprechend ein Gleichungspaar

$$(G\ 2) \quad \begin{cases} x = c \\ z = c' \end{cases} \quad \text{oder} \quad (G\ 3) \quad \begin{cases} x = c \\ y = c'' \end{cases}$$

zu. Umgekehrt stellt wieder jedes Gleichungspaar (G 2) bzw. (G 3) eine Gerade dar. — Damit haben wir:

- (3.1) Die Punkte von $\mathcal{G}_\omega$ lassen sich so den Elementen von $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$ zuordnen, daß die Ebenen durch Gleichungen (E 1), (E 2), (E*) und die Geraden durch Gleichungspaare (G 1), (G 2), (G 3) dargestellt werden.
- (3.2) Zwei Ebenen sind genau dann parallel, wenn ihre Gleichungen einem Paar der folgenden drei Arten angehören:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & y = T'(a_1, x, b_1); \quad y = T'(a_1, x, b_1^*) \\ \text{b)} & z = T(a_2, x, b_2); \quad z = T(a_2, x, b_2^*) \\ \text{c)} & x = c; \quad x = c^*. \end{array}$$

BEWEIS. Die Gleichungen a) können als Geradengleichungen paralleler Geraden in der Ebene $z=0$ aufgefaßt werden (vgl. [4], S. 35). Da z in den Gleichungen nicht auftritt, sind auch die entsprechenden Ebenen identisch oder besitzen keinen Schnittpunkt, d.h. sind parallel. Genau so schließt man in den Fällen b) und c), daß es sich um parallele Ebenen handelt. — Daß bei allen anderen Kombinationen von Gleichungen keine parallelen Ebenen vorliegen, sieht man so ein: Zwei durch Gleichungen $y = T'(a_1, x, b_1)$; $y = T'(a_1^*, x, b_1^*)$ mit $a_1 \neq a_1^*$ dargestellte Ebenen sind gewiß verschieden und besitzen wegen (T 3) einen Schnittpunkt. Entsprechendes gilt für Gleichungen vom Typ b). Eine Gleichung a) und eine Gleichung b) definieren nach (G 1) eine Gerade. Die ersten Gleichungen von b) und c) bzw. a) und c) ergeben

gemäß (G 2) bzw. (G 3) die durch $z = T(a_2, c, b_2)$; $x = c$ bzw. $y = T'(a_1, c, b_1)$; $x = c$ definierte Gerade. — Damit ist (3.2) bewiesen.

Wir gehen jetzt umgekehrt von einem beliebigen zweifachen Ternärkörper aus und definieren:

Punkte: Elemente von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$.

Ebenen: Lösungsgebilde einer der Gln. (E 1), (E 2), (E*).

Geraden: Gemeinsames Lösungsgebilde eines der Gleichungspaare (G 1), (G 2), (G 3).

Zwei Ebenen $y = T'(a_1, x, b_1)$ und $y = T'(a_1^*, x, b_1^*)$ heißen *parallel*, wenn $a_1 = a_1^*$ gilt; ebenso zwei Ebenen $z = T(a_2, x, b_2)$ und $z = T(a_2^*, x, b_2^*)$ bei $a_2 = a_2^*$. Zwei Ebenen $x = c$ und $x = c^*$ nennen wir stets parallel. Demgemäß bezeichnen wir zwei Geraden als *parallel*, wenn die entsprechenden Ebenen in (G 1) bzw. (G 2) bzw. (G 3) parallel sind. Bei zwei Geraden (G 2) bzw. (G 3) ist das immer der Fall. — Diese Parallelität ist offenbar eine Äquivalenzrelation. Wir ordnen den Klassen paralleler Geraden *uneigentliche Punkte (Richtungen)*, den Klassen paralleler Ebenen *uneigentliche Geraden* zu. Die den Geraden (G 2) bzw. (G 3) zugeordneten uneigentlichen Punkte nennen wir insbesondere *Grundpunkte* A_1 bzw. A_2 . Die Gesamtheit der eigentlichen Punkte definiere eine *uneigentliche Ebene* ω . Alle uneigentlichen Punkte und Geraden und nur diese sollen mit ω inzidieren. Die übrigen Inzidenzvorschriften werden in der gewohnten Weise festgelegt. Dann gilt:

(3.3) *Die Punkte, uneigentlichen Punkte, Ebenen und ω bilden zusammen ein 2-Gefüge.*

BEWEIS. Die Eigenschaft (1) eines Gefüges ist nach Definition der Punkte A_1, A_2 erfüllt.

Um (2) einzusehen, betrachte man zwei verschiedene Punkte $P = (x_0, y_0, z_0)$, $Q = (x_1, y_1, z_1)$. Ist $x_0 = x_1$, so liegen P und Q in der Ebene $x = x_0$. Sei daher $x_0 \neq x_1$. Die Punkte $(x_0, y_0, 0)$ und $(x_1, y_1, 0)$ bestimmen dann in der Ebene $z = 0$ eine Gerade

$$y = T'(a_1, x, b_1).$$

Im Raum definiert diese Gleichung eine Ebene, der P, Q angehören. Entsprechend findet man eine Ebene

$$z = T(a_2, x, b_2),$$

in der P und Q liegen. (2) ist damit für eigentliche Punkte nachgewiesen. Sind P, Q beide uneigentlich, dann ist ω eine Ebene der gewünschten Art. Wir können somit etwa $P = (x_0, y_0, z_0)$ eigentlich und Q uneigentlich annehmen. Ist Q ein Grundpunkt, dann ist die Behauptung evident. Sei daher (G 1) eine Gerade der Richtung Q .

Die Ebene $z = 0$ ist eine affine Ebene. In ihr sei

$$(*) \quad y = T'(a_1, x, b_1')$$

eine Parallelgerade zu $y = T'(a_1, x, b_1)$. Entsprechend sei

$$(**) \quad z = T(a_2, x, b'_2)$$

eine Parallelgerade zu $z = T(a_2, x, b_2)$ in der Ebene $y = 0$. (*) und (**) definieren dann zwei Ebenen, in denen P und Q liegen. — Damit ist (2) erledigt.

Sind irgend drei Ebenen gegeben, so gehen zwei von ihnen gleichzeitig durch A_1 bzw. A_2 . Verlaufen sie alle drei durch einen dieser Punkte, dann ist (3) erfüllt. Seien daher zuerst zwei (eigentliche) Ebenen durch A_1 , aber nicht durch A_2 — wir nennen sie wieder A_2 -Ebenen — und eine (eigentliche) Ebene durch A_1 , aber nicht durch A_2 — eine A_1 -Ebene — gegeben:

$$(***) \quad \begin{cases} y = T'(a_1, x, b_1) \\ y = T'(a_1^*, x, b_1^*) \\ z = T(a_2, x, b_2). \end{cases}$$

Dann existiert im Falle $a_1 \neq a_1^*$ nach (T 3) eine gemeinsame Lösung (x_0, y_0) der beiden ersten Gleichungen, so daß $(x_0, y_0, T(a_2, x_0, b_2))$ einen gemeinsamen Punkt der drei Ebenen darstellt. Ist $a_1 = a_1^*$, so ist die durch die erste und die dritte Gleichung definierte Gerade zu der durch die zweite und dritte Gleichung definierten parallel. Die drei Ebenen haben also einen uneigentlichen Punkt gemein. — Entsprechend schließt man im Falle zweier A_2 -Ebenen und einer A_1 -Ebene. — Ist eine der drei Ebenen uneigentlich ($= \omega$), so schneiden sich die beiden andern in einer eigentlichen oder uneigentlichen Geraden, die mit ω immer einen Punkt gemeinsam hat. — Damit ist (3) bewiesen.

Wir zeigen jetzt (4). Seien (***) wieder die Gleichungen der drei betrachteten Ebenen. Die oben als vorhanden nachgewiesene gemeinsame Lösung ist bei $a_1 \neq a_1^*$ wegen (T 3) und bei $a_1 = a_1^*$ nach Definition der uneigentlichen Punkte eindeutig bestimmt. Die Voraussetzungen von (4) sind also nicht erfüllbar. Entsprechend sieht man, daß es sich nicht um zwei A_2 -Ebenen und eine A_1 -Ebene handeln kann. Gehen alle drei Ebenen durch den gleichen Grundpunkt, etwa A_1 , und ist (x_0, y_0, z_0) ein gemeinsamer Punkt der Ebenen, so sind die Punkte (x_0, y_0, z) mit beliebigem $z \in \mathbb{R}$ genau die gemeinsamen (eigentlichen) Punkte je zweier der Ebenen. Haben die Ebenen einen zweiten uneigentlichen Schnittpunkt, dann zeigt eine einfache Überlegung, daß sie zu je zweien parallel sind, sich also in der gleichen uneigentlichen Geraden schneiden. — (4) ist somit gezeigt.

Um den zweiten Teil von (5) einzusehen, betrachten wir die Punkte $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$. Sie bilden zusammen mit A_1, A_2 ein Quintupel der gewünschten Art. Mit Hilfe dieses Quintupels zeigt man auch den ersten Teil von (5). — Damit ist (3.3) bewiesen.

Den durch die Geraden

$$\begin{cases} y = c \\ z = c' \end{cases}$$

bestimmten uneigentlichen Punkt nennen wir wieder U , den Ursprung des Koordinatensystems O . Dann bestimmen O, U, A_1, A_2 in dem 2-Gefüge von (3.3), wenn man noch die Einheitspunkte geeignet wählt, ein Koordinatensystem mit dem zugrunde gelegten zweifachen Ternärkörper als Koordinatenbereich. — (3.1) und (3.3) ergeben:

SATZ 2. Ein 2-Gefüge $\mathcal{G}$ läßt sich nach Wegnahme einer $A_1 A_2$ -Ebene ω mit Hilfe eines zweifachen Ternärkörpers $\mathfrak{K}$ so beschreiben, daß die Punkte von $\mathcal{G}_\omega$ eindeutig den Elementen von $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$ entsprechen und die Ebenen durch Gln. (E 1), (E 2), (E*) dargestellt werden. Umgekehrt entspricht jedem zweifachen Ternärkörper $\mathfrak{K}$ ein 2-Gefüge, das in dieser Weise mittels $\mathfrak{K}$ beschrieben wird.

Aus Satz 2 und der Definition eines zweifachen Ternärkörpers folgt:

KORROLAR ZU SATZ 2. Zwei beliebige projektive Ebenen können als Ebenen eines und desselben 2-Gefüges aufgefaßt werden, sofern sie nur gleichmächtige Geraden besitzen.

4. Natürliche Ergänzungsräume von Gefügen

Unser nächstes Ziel ist die Darstellung aller Ebenen eines beliebigen affinen Gefüges durch Ebenengleichungen. Wir führen zu diesem Zweck einen Begriff des natürlichen Ergänzungsraumes ein.

In den $A_1 A_2$ -Ebenen eines affinen 2-Gefüges $\mathcal{G}_\omega$ gibt es jeweils nur zwei Parallelscharen von Geraden (durch A_1 bzw. A_2); im allgemeinen besitzen also zwei Punkte keine Verbindungsgerade. Wir erklären daher folgendermaßen neue Geraden: Sei nach Wahl eines Koordinatensystems ε die durch O, E bestimmte A_2 -Ebene (Bezeichnungen wie in Abschnitt 3). Wir nennen drei Punkte einer $A_1 A_2$ -Ebene *kollinear*, wenn ihre Verbindungsgeraden mit U die Ebene ε in kollinearen Punkten treffen. Wir nehmen in $\mathcal{G}_\omega$ also eine „Parallelprojektion“ von ε auf die $A_1 A_2$ -Ebenen in Richtung der x -Achse vor. Dadurch werden die $A_1 A_2$ -Ebenen von $\mathcal{G}_\omega$ zu affinen Ebenen und erhalten die gleiche Struktur wie die A_2 -Ebenen. Die schon vorhandenen Geraden sind auch Geraden im neuen Sinne. Sämtliche Bildgeraden zweier paralleler Geraden von ε sollen zueinander *parallel* heißen. Dann zerfallen auch die neuen Geraden in Äquivalenzklassen paralleler Geraden. Jeder solchen Klasse ordnen wir einen uneigentlichen Punkt auf der uneigentlichen Geraden $A_1 A_2$ zu. Schließlich statten wir auch die so erweiterte uneigentliche Ebene ω mit der Struktur von ε aus, indem wir ε etwa von E_1 aus auf ω „projizieren“. Mit den so neu definierten Punkten und Geraden wird $\mathcal{G}$ zu einem „halbprojektiven Raum“¹¹⁾. Wir nennen ihn einen (den durch ε, U, E_1 bestimmten) *natürlichen*¹²⁾ *Ergänzungsraum* $\overline{\mathcal{G}}$ von $\mathcal{G}$. Entsprechend definieren

¹¹⁾ Als halbprojektiven Raum bezeichnet man eine Menge von Punkten und Geraden mit einer Inzidenzbeziehung, so daß zwei verschiedene Punkte stets auf genau einer Geraden liegen und jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält.

¹²⁾ Man kann die $A_1 A_2$ -Ebenen statt durch Projektion von ε auf sie auch auf andere Weise zu projektiven Ebenen ergänzen. Dabei kann beispielsweise ein 2-Gefüge, das Subgefüge eines projektiven Raumes ist, einen nicht-desarguesschen halbprojektiven Raum als Ergänzungsraum erhalten. — Demgegenüber nennen wir die hier angeführte Ergänzung „natürlich“.

wir als *natürlichen Ergänzungsraum* $\overline{\mathcal{G}}_0$ von $\mathcal{G}_0$ den bei der genannten Ergänzung aus $\mathcal{G}_0$ entstehenden Raum. $\overline{\mathcal{G}}_0$ ist bereits durch $\mathcal{G}_0$, ε , U bestimmt.

Unter einer *Quasiebene* von $\overline{\mathcal{G}}_0$ verstehen wir ein System von Punkten und Geraden der folgenden Art: Gegeben sei eine maximale Menge (= Schar) von untereinander parallelen Geraden, die 1. alle zur x, z -Ebene parallel sind und 2. eine feste evtl. uneigentliche Gerade der y, z -Ebene — die *Trägergerade* der Schar — schneiden (vgl. Fig. 4). Die Gesamtheit aller Punkte der Schargeraden fassen

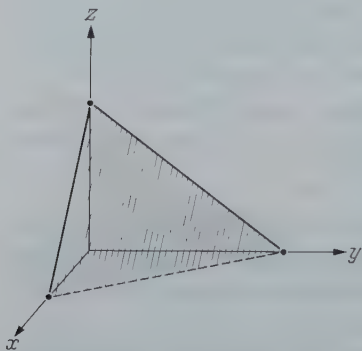


Fig. 4

wir als Punktmenge einer Quasiebene auf. Die Gesamtheit aller Geraden, deren Punkte sämtlich in dieser Punktmenge liegen, wählen wir als Geradenmenge der Quasiebene. (Insbesondere gehören dazu die Geraden der genannten Schar sowie deren Trägergerade). Die Inzidenz von Punkten und Geraden mit einer Quasiebene ist dadurch in natürlicher Weise erklärt.

Wegen (2.2) und (2.6) enthält jede Gefügeebene eine Geradenschar mit den Eigenschaften 1., 2. und kann daher — nach Weglassung ihrer „uneigentlichen Gerade“ — als Quasiebene aufgefaßt werden.

Wir nennen zwei Quasiebenen *parallel*, wenn sie entweder zusammenfallen oder keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

(4.1) Ist ein 2-Gefüge $\mathcal{G}$ Subgefüge eines Gefüges $\mathcal{G}'$, dann kann man $\overline{\mathcal{G}}$ so wählen, daß jede Gerade von $\mathcal{G}'$ auch Gerade von $\overline{\mathcal{G}}$ ist. Die Gefügeebenen von $\mathcal{G}'$ können dann als Quasiebenen von $\overline{\mathcal{G}}_0$ aufgefaßt werden.

BEWEIS. Der Übergang von $\mathcal{G}$ zu $\mathcal{G}'$ läßt sich kurz so beschreiben, daß einmal auf $A_1 A_2$ (A_1, A_2 die Grundpunkte von $\mathcal{G}$) neue Grundpunkte auftreten können und zum anderen nicht auf $A_1 A_2$ gelegene Punkte von $\mathcal{G}$ zu Grundpunkten werden können. In beiden Fällen gibt es solche neue Ebenen, deren Schnittgebilde mit den Ebenen von $\mathcal{G}$ keine Geraden im Sinne von $\mathcal{G}$ sind, also neue Geraden definieren. Existiert ein Grundpunkt von $\mathcal{G}'$, der nicht auf $A_1 A_2$ liegt, so legt man den Punkt U (s. die Definition eines Ergänzungsraumes) in einen solchen Punkt. Dann gehören auch die neuen Geraden von $\mathcal{G}'$ definitionsgemäß zu denjenigen von $\overline{\mathcal{G}}$.

Sind alle Grundpunkte von $\mathcal{G}'$ kollinear, so kann U beliebig ($\notin A_1 A_2$) gewählt werden: Es treten nämlich in $\mathcal{G}'$ nur solche neue Geraden auf, die durch einen Grundpunkt verlaufen; verbindet man diese (sofern sie U nicht enthalten) mit U durch Ebenen von $\mathcal{G}'$, so schneiden diese Ebenen die Ebene ε (s. die Definition eines Ergänzungsraumes) in Geraden.

Der zweite Teil von (4.1) folgt unmittelbar aus der Definition der Quasiebenen als Systeme von Punkten und Geraden.

In der y, z -Ebene von $\mathcal{G}$ führen wir nun den auf O, E'', A_1, A_2 bezogenen Ternärkörper ein (Fig. 5). Seine Elemente sind mit den eigentlichen Punkten der z -Achse identifiziert. Die ternäre Verknüpfung ist $=T$, wie man folgendermaßen sieht: Projiziert man die x, y -Ebene zuerst parallel zur y -Achse auf ε und dann parallel zur x -Achse auf die y, z -Ebene, dann bleiben alle Punkte auf der z -Achse fest und geht die „Einheitsgerade“ OE' in die „Einheitsgerade“ OE'' über. Also wird die Figur, mit deren Hilfe man in der x, z -Ebene $T(a, x, b)$ definiert, in eine ebensolche der y, z -Ebene über. — Die Geraden der y, z -Ebene erhalten somit Gleichungen $z = T(a, y, b)$ bzw. $y = c$. — Wir definieren noch:

$$y \xrightarrow{\tau} z: Y^\tau = ([YA_2](OE'')A_1)(OA_2)$$

für $Y \in y$.

$$(4.2) \text{ Es gilt } \varrho\sigma^{-1} = \tau.$$

BEWEIS. Wir setzen

$$D = (EA_2)(E'A_1).$$

Projiziert man einen Punkt von OD parallel zu den Koordinatenachsen auf die Koordinatenebenen, dann liegen die Bildpunkte jedesmal auf einer der Einheitsgeraden OE, OE', OE'' (vgl. Fig. 5). Daraus ergibt sich sofort die Behauptung.

(4.3) Quasiebenen, die nicht A_2 -Ebenen sind, werden durch Gleichungen

$$(E_Q) \quad z = T(a, x, T(b, y, c))$$

dargestellt. Umgekehrt repräsentiert jede derartige Gleichung eine Quasiebene.

BEWEIS. Eine Gleichung (E_Q) stellt diejenige Quasiebene dar, deren definierende Schargeraden durch Gleichungen

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = T(a, x, T(b, y_0, c)) \end{cases}$$

bei beliebig gewähltem y_0 dargestellt werden und deren Trägergeraden Gleichungen

$$(*) \quad \begin{cases} z = T(b, y, c) \\ x = 0 \end{cases}$$

besitzt.

Ist umgekehrt eine Quasiebene gegeben, die nicht A_2 -Ebene ist, so besitzt die Trägergerade der zugehörigen definierenden Parallelenschar Gln. (*). Durch jeden Punkt (O, y_0, z_0) der Trägergerade verläuft eine Schargerade, die also Gleichungen

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = T(a, x, z_0) \end{cases}$$

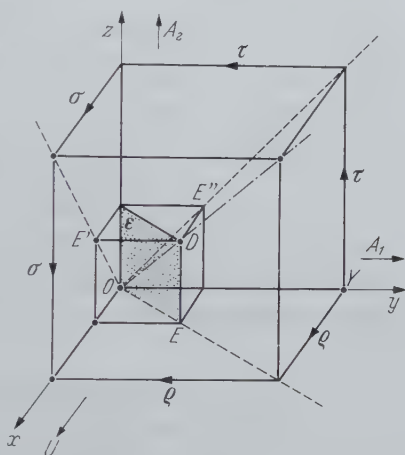


Fig. 5

haben muß. Dabei hängt a wegen der Parallelität der Schargeraden nicht von y_0 ab. Beachtet man noch, daß stets $z_0 = T(b, y_0, c)$ gilt, so hat man, daß ein Punkt (x, y, z) genau dann auf der Quasiebene liegt, wenn er der Gleichung $z = T(a, x, T(b, y, c))$ genügt. — Damit ist (4.3) bewiesen.

Aus Satz 2, (4.1) und (4.3) folgt:

SATZ 3. *Jedes Gefüge läßt sich nach Wegnahme einer „uneigentlichen“ Ebene ω so mit Hilfe eines zweifachen Ternärkörpers $\mathfrak{R}$ beschreiben, daß die Punkte den Elementen von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ eineindeutig entsprechen und die Ebenen sämtlich durch Gleichungen der Form $z = T(a, x, T(b, y, c))$ bzw. $y = T'(d, x, e)$ bzw. $x = f$ dargestellt werden.*

Man beachte, daß im allgemeinen nicht umgekehrt jeder Gleichung $z = T(a, x, T(b, y, c))$ eine Gefügeebene entspricht. Darüber geben die folgenden Abschnitte nähere Auskunft.

KORROLAR ZU SATZ 3. *Sind die Punkte O, D, U, A, A' zu je viere nicht komplanar, sonst beliebig und sind A, A' Grundpunkte, dann wird durch dieses Quintupel gemäß Fig. 5 (mit A, A' statt A_1, A_2) ein Koordinatensystem festgelegt¹³).*

5. Ternärkörper und cartesische Gruppen

Ehe wir den in Satz III genannten Stufenaufbau behandeln, geben wir in diesem Abschnitt noch zwei Vorstufen an. Einmal interessiert der Fall, daß der zweifache Ternärkörper, der ein affines Gefüge beschreibt, ein (einfacher) Ternärkörper ist; zum andern charakterisieren wir den Fall, daß der Koordinatenbereich eine „cartesische Gruppe“ (s. weiter unten) ist.

SATZ 4. *Ist $\mathcal{G}$ ein 2-Gefüge und $\mathcal{G}_\omega$ ein zugehöriges affines Gefüge, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. $\mathcal{G}_\omega$ läßt sich (gemäß Satz 2) mit Hilfe eines Ternärkörpers beschreiben ($T = T'$).

2. Es gibt in einem $\overline{\mathcal{G}_\omega}$ eine Quasiebene, die affine Ebene, aber keine Ebene von $\mathcal{G}_\omega$ ist.

BEWEIS. 2. $\rightarrow$ 1. Die vorhandene affine Ebene α schneidet jede A_2 -Ebene in einer Geraden, denn nach (2.6) gibt es zwei gemeinsame Punkte der Ebenen, und da $\overline{\mathcal{G}}$ ein halbprojektiver Raum ist, existiert die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte und ist eindeutig bestimmt; ferner liegt sie in beiden Ebenen. Man kann das Koordinatensystem so wählen, daß O und D (s. Fig. 5) in α liegen und die Schargeraden die Richtung U besitzen. Projiziert man dann in $\overline{\mathcal{G}_\omega}$ die x, z -Ebene parallel zur y -Achse auf α und dann parallel zur z -Achse auf die x, y -Ebene, dann erfährt $\mathfrak{R}$ (also die z -Achse) die Abbildung τ^{-1} . Genaue hat man hierbei eine Isomorphie zwischen dem auf O, E, U, A_1 bezogenen Ternärkörper $\mathfrak{R}_1$ und dem auf O, E', U, A_2 bezogenen Ternärkörper $\mathfrak{R}_2$.

¹³) Wir werden das Koordinatensystem jeweils den Zwecken entsprechend wählen, beispielsweise U in einen Grundpunkt legen, falls ein nicht mit A, A' kollinearer Grundpunkt existiert.

Nach (4.2) ist aber $\varrho\sigma^{-1} = \tau$, so daß $T(a, x, b) = T'(a, x, b)$ für beliebige Elemente $a, x, b \in \mathfrak{K}$ folgt, d.h. $\mathfrak{K}$ ein Ternärkörper ist.

1. $\rightarrow$ 2. Wir betrachten in $\overline{\mathcal{G}}_\omega$ die Quasiebene $z = y$. Sie sei mit α bezeichnet. Offenbar liegen sämtliche Geraden

$$\begin{cases} y = T(a, x, b) \\ z = T(a, x, b) \end{cases}$$

in α , so daß man sowohl alle Geraden der x, y -Ebene wie alle Geraden der x, z -Ebene auf α projizieren kann. α ist daher eine affine Ebene. — Damit ist Satz 4 bewiesen.

Wir stellen jetzt die Definitionen für die speziellen Ternärkörper zusammen, die wir in diesem und in den folgenden Abschnitten benötigen: $\mathfrak{K}$ sei ein (einfacher) Ternärkörper mit aufspaltbarer Verknüpfung:

$$T(u, v, w) = uv + w, \quad u, v, w \in \mathfrak{K} \quad \text{beliebig.}$$

$\mathfrak{K}$ heißt *cartesische Gruppe*, wenn die Addition assoziativ ist, $\mathfrak{K}$ also hinsichtlich der Addition eine Gruppe bildet. — Weiter interessieren folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \text{(RD)} \quad & u(v + w) = uv + uw \quad \text{(Rechtsdistributivgesetz)} \\ \text{(LD)} \quad & (u + v)w = uw + vw \quad \text{(Links-distributivgesetz)} \\ \text{(A)} \quad & (uv)w = u(vw) \quad \text{(Assoziativgesetz)} \end{aligned}$$

Eine cartesische Gruppe heißt

Rechtsquasikörper, wenn (RD) erfüllt ist,

Linksquasikörper, wenn (LD) gilt,

Assoziativer Rechtsquasikörper, wenn (RD) und (A) gelten,

Schiefkörper, wenn (RD), (LD) und (A) richtig sind.

In allen vier Fällen ist die *Addition kommutativ* (vgl. [4], S. 91).

Wir charakterisieren jetzt den Fall der cartesischen Gruppe:

Satz 5. Ist $\mathcal{G}$ ein 2-Gefüge und $\mathcal{G}_\omega$ ein zugehöriges affines Gefüge, dann entsprechen sich eindeutig folgende Bedingungen:

1. In einem natürlichen Ergänzungsraum $\overline{\mathcal{G}}_\omega$ von $\mathcal{G}_\omega$ gibt es eine maximale Schar zu je zweien paralleler Quasiebenen, die affine Ebenen, aber keine Ebenen von $\mathcal{G}_\omega$ sind.

2. $\mathcal{G}_\omega$ läßt sich (gemäß Satz 2) mit Hilfe einer cartesischen Gruppe beschreiben.

1. $\rightarrow$ 2¹⁴⁾. Wir führen in $\overline{\mathcal{G}}_\omega$ ein Koordinatensystem so ein, daß der Punkt U und der uneigentliche Punkt der Geraden OD (s. Korrolar zu Satz 3) auf der gemeinsamen uneigentlichen Geraden der angenommenen affinen Ebenen liegen. Dann erhalten diese Ebenen Gleichungen

$$z = y + c,$$

sofern man

$$T(1, y, c) = y + c$$

¹⁴⁾ Diesen Teil des Beweises sowie andere wertvolle Bemerkungen verdankt Verf. dem Referenten.

setzt. Ihr Schnitt mit einer A_2 -Ebene $y = T(a, x, b)$ muß stets eine Gerade sein, d.h. es gibt a', b' mit

$$z = T(a, x, b) + c = T(a', x, b')$$

für alle x . Dabei hängt a' nicht von c ab (vgl. (4.3)). Mit $x=0$ erhält man $b+c=b'$ und $c=0$ liefert $T(a, x, b) = T(a', x, b)$, also $a=a'$. Ferner ergibt $a=1$ die Assoziativität der Addition:

$$(x + b) + c = x + (b + c).$$

Setzt man noch

$$T(a, x, 0) = ax,$$

so folgt mit $b=0$:

$$ax + c = T(a, x, c),$$

d.h. die Verknüpfung T ist aufspaltbar. $\mathfrak{R}$ ist somit cartesische Gruppe.

2. $\rightarrow$ 1. Ist $\mathfrak{R}$ eine cartesische Gruppe, so kann man die ternäre Verknüpfung aufspalten:

$$T(a, x, b) = ax + b,$$

wo $\mathfrak{R}$ bezüglich der Addition eine Gruppe bildet. Wir betrachten die Ebenen

$$z = y + c$$

mit beliebigem $c \in \mathfrak{R}$. Schneidet man mit einer beliebigen A_2 -Ebene $y = ax + b$, so erhält man

$$z = (ax + b) + c = ax + (b + c),$$

so daß das Schnittgebilde eine Gerade ist. Daraus folgt 1.

6. Kollineare Grundpunkte. Linksquasikörper

Als Kern $\mathfrak{R}_0$ eines Linksquasikörpers $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller $x \in \mathfrak{R}$ mit

$$(K) \quad \begin{cases} (xa)b = x(ab) \\ x(a+b) = xa + xb \end{cases}$$

für beliebige Elemente $a, b \in \mathfrak{R}$. Definiert man in $\mathfrak{R}$ eine Multiplikation $a * b$ durch

$$a * b = ba,$$

so geht $\mathfrak{R}$ mit dieser neuen Multiplikation in einen Rechtsquasikörper und $\mathfrak{R}_0$ in den Kern des Rechtsquasikörpers über (vgl. [4], S. 204). *Man ersieht also aus den Ergebnissen über Translationsebenen ([4], S. 204), daß $\mathfrak{R}_0$ ein Schiefkörper ist.*

Wir definieren jetzt folgenden Operator (erklärbar in jeder cartesischen Gruppe):

$$\langle x, a, b, c \rangle \equiv [x(a+c)]b - x(ab+c) - (xc)b + xc.$$

Dann gilt:

(6.1) Der Kern $\mathfrak{K}_0$ eines Linksquasikörpers $\mathfrak{K}$ besteht aus allen Elementen x mit

$$(K') \quad \langle x, a, b, c \rangle = 0.$$

für beliebige Elemente $a, b, c \in \mathfrak{K}$.

BEWEIS. Da (K') sofort aus (K) folgt, brauchen wir nur zu zeigen, daß (K) eine Folge von (K') ist. $(xa)b = x(ab)$ ergibt sich aus (K') , wenn man $c=0$ setzt. Um die zweite Regel einzusehen, setze man $a=c$. Dann folgt:

$$x(2a)b - x(ab+a) - xab + xa = 0.$$

Nimmt man $x \cdot 2 = 2 \cdot x$ als bewiesen an, dann gilt:

$$x(ab+a) = x(ab) + xa.$$

Da ab bei festem $a \neq 0$ alle Werte von $\mathfrak{K}$ durchläuft ($ab=u$ ist stets nach b auflösbar), hat man damit die gewünschte Beziehung.

Es ist also noch $x \cdot 2 = 2x$ nachzuweisen (d. h. $x(1+1) = x+x$). Wir setzen zu diesem Zweck in (K') $a=-1$, $b=2$, $c=2$. Das ergibt

$$\begin{aligned} x(-1+2)2 - x(-1 \cdot 2 + 2) - (x \cdot 2)2 + x \cdot 2 \\ = x \cdot 2 + x \cdot 2 - (x \cdot 2)2 = (2x - x \cdot 2)2 = 0. \end{aligned}$$

Im Falle $\text{Char. } \mathfrak{K} \neq 2$ folgt daraus $2x = x \cdot 2$. Im Falle $\text{Char. } \mathfrak{K} = 2$ ist diese Beziehung aber von selbst erfüllt. — Damit ist der Beweis von (6.1) vollendet.

SATZ 6. Sei $\mathcal{G}$ ein 2-Gefüge, $\mathcal{G}_\omega$ ein zugehöriges affines Gefüge. Dann sind folgende Bedingungen gleichwertig:

1. $\mathcal{G}$ ist Subgefüge eines Projektiven Gefüges $\mathcal{G}'$ mit $n \geq 3$ kollinearen Grundpunkten.

2. $\mathcal{G}_\omega$ läßt sich mit Hilfe eines Linksquasikörpers beschreiben, dessen Kern $\mathfrak{K}_0$ mindestens $n-1 \geq 2$ Elemente besitzt.

BEWEIS. $1 \rightarrow 2$. $\overline{\mathcal{G}_\omega}$ sei ein natürlicher Ergänzungsraum von $\mathcal{G}_\omega$ und $\mathfrak{K}$ sei der zugehörige zweifache Ternärkörper. Wir können die Koordinateneinführung so vornehmen, daß OE'' einen (uneigentlichen) Grundpunkt, etwa A_3 , als Richtung enthält. Dann ist nach Satz 5 $\mathfrak{K}$ eine cartesische Gruppe.

Nach (4.1) können die Ebenen von $\mathcal{G}'$ als Quasiebenen von $\overline{\mathcal{G}_\omega}$ aufgefaßt werden. Insbesondere erhalten gemäß Satz 3 die A_3 -Ebenen Gleichungen

$$z = dx + y + e.$$

Wir nehmen speziell $e=0$ an. Der Schnitt mit $y=ax$ ergibt nach Annahme eine Gerade, d. h. es gilt

$$z = dx + ax = ux$$

für ein bestimmtes u identisch in x . Für $x=1$ erhält man $u=d+a$, es folgt also

$$dx + ax = (d+a)x$$

für alle $d, x, a \in \mathfrak{K}$, d. h. $\mathfrak{K}$ ist ein Linksquasikörper.

Durch O gehende A_i -Ebenen von $\mathcal{G}'_\omega$ besitzen in $\overline{\mathcal{G}}_\omega$ (bei gleichem $i \geq 3$) Gleichungen

$$(*) \quad z = dx + ky$$

mit demselben $k \neq 0$. Schneidet man mit einer beliebigen A_2 -Ebene

$$(**) \quad y = ax + c,$$

so folgt aus der Annahme 1.:

$$z = dx + k(ax + c) = ux + v$$

für ein Paar $u, v \in \mathbb{R}$ identisch in x . Mit $x=0$ erhält man $v=kc$ und mit $x=1$ ergibt sich dann

$$u = d + k(a + c) - kc,$$

also

$$dx + k(ax + c) = dx + [k(a + c)]x - (kc)x + kc$$

oder

$$[k(a + c)]x - k(ax + c) - (kc)x + kc = 0,$$

also

$$\langle k, a, x, c \rangle = 0 \quad \text{für alle } a, x, c \in \mathbb{R},$$

d.h. nach (5.1): $k \in \mathbb{R}_0$. Da jedem Grundpunkt $\neq A_2$ ein solches k zugeordnet ist, folgt 2.

2. $\rightarrow$ 1. Sei umgekehrt $\mathbb{R}$ ein Linksquasikörper und sei $k \in \mathbb{R}_0$. Dann ergibt der Schnitt von (*) und (**) nach den Regeln (K):

$$z = dx + k(ax + c) + e = (d + ka)x + (kc + e),$$

d.h. das Schnittgebilde ist eine Gerade. Zu jedem k existiert also eine Richtung $A \neq A_2$ ($A \in \mathcal{A}$), derart, daß alle Quasiebenen durch A affine Ebenen sind.

Bisher ist nur gezeigt, daß die A -Ebenen (wir bezeichnen so die Quasiebenen durch A) mit $A \neq A_1, A_2$ die A_1 - und die A_2 -Ebenen in Geraden schneiden. Da jedoch in $\overline{\mathcal{G}}_\omega$ je zwei Punkte genau eine Verbindungsgerade besitzen, ergibt ein einfacher Schluß, daß auch eine A -Ebene stets eine A' -Ebene ($A' \neq A, A_1, A_2$) in einer Geraden schneidet. Daraus folgt 1.

$\mathbb{R}_0$ enthält stets die Elemente 0, 1. Daher liefert Satz 6:

KOROLLAR ZU SATZ 6. Ein affines 2-Gefüge $\mathcal{G}_\omega$ wird dann und nur dann durch einen Linksquasikörper beschrieben, wenn $\mathcal{G}$ Subgefüge eines Gefüges mit mindestens 3 kollinearen Grundpunkten ist.

Ist das in Satz 6 genannte Gefüge $\mathcal{G}'$ insbesondere maximal, so bezeichnen wir n als die lineare Ordnung l von $\mathcal{G}'$ und von jedem Subgefüge von $\mathcal{G}'$, insbesondere also von $\mathcal{G}$. Dann folgt aus Satz 6:

(6.2) Zwischen der linearen Ordnung l eines Gefüges $\mathcal{G}$ mit kollinearen Grundpunkten und der Anzahl $|\mathbb{R}_0|$ der Elemente des Kerns eines Linksquasikörpers, der ein zu $\mathcal{G}$ gehöriges affines Gefüge beschreibt, besteht bei $l \geq 3$ die Beziehung

$$l = |\mathbb{R}_0| + 1.$$

Im Falle endlicher linearer Ordnung folgt aus (6.2):

(6.3) *Ist die lineare Ordnung l von $\mathcal{G}$ eine ungerade Zahl, dann besitzt ein zu $\mathcal{G}$ gehöriger Linksquasikörper stets die Charakteristik 2.*

Ferner ergibt (6.2) noch:

(6.4) *Ein Gefüge besitzt unendliche lineare Ordnung, wenn es durch einen Linksquasikörper mit Charakteristik 0 beschrieben wird.*

Ein Subgefüge eines projektiven dreidimensionalen Raumes P_3 besitzt stets eine lineare Ordnung, die mit der Anzahl der Punkte einer Geraden von P_3 übereinstimmt. (6.3) stellt also eine Verallgemeinerung der bekannten Tatsache dar, daß die Zahl der Punkte auf einer Gerade in einem endlichen dreidimensionalen projektiven Raum bzw. in einer endlichen desarguesschen projektiven Ebene nur dann ungerade ist, wenn der zugehörige Koordinatenschiefkörper die Charakteristik 2 besitzt.

(6.5) *Die Aussage von Satz III (Abschnitt 1) gilt für die beiden ersten Tabellenzeilen.*

BEWEIS. Man wählt zunächst gemäß (2.1) ein 2-Gefüge $\mathcal{G}^*$ aus, das Subgefüge von $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathbb{P})$ ist und betrachtet einen nach (4.1) existierenden natürlichen Ergänzungsraum $\overline{\mathcal{G}^*}$ von $\mathcal{G}^*$, in dem die Geraden von $\mathcal{G}'(\mathcal{U}', \mathbb{P}')$ ebenfalls Geraden sind. Zeichnet man eine $A_1 A_2$ -Ebene ω von $\mathcal{G}^*$ aus, so lassen sich die Ebenen von $\mathcal{G}'_o(\mathcal{U}', \mathbb{P}')$ als Ebenen von $\overline{\mathcal{G}^*_\omega}$ auffassen und algebraisch beschreiben. Die Voraussetzungen von Satz 6 gelten dann jeweils gleichzeitig für $\mathcal{G}^*$ und $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathbb{P})$. Daraus ergibt sich die Behauptung (vgl. auch Korollar zu Satz 6).

7. Nichtkollineare Grundpunkte. Assoziative Koordinatenbereiche

Kollineare Grundpunkte nehmen, wie wir sahen, nur geringen Einfluß auf die Assoziativität der Koordinatenbereiche $\mathfrak{K}$. Lediglich der Kern $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ muß bei $n \geq 4$ groß genug sein, weil er mindestens $n - 1$ Elemente enthält. Anders verhält es sich bei den Gefügen mit nichtkollinearen Grundpunkten, die wir jetzt betrachten.

SATZ 7. *Sei $\mathcal{G}$ ein 2-Gefüge, $\mathcal{G}_o$ ein zugehöriges affines Gefüge. Dann besagen die folgenden Bedingungen das Gleiche:*

1. *$\mathcal{G}$ ist Subgefüge eines Gefüges $\mathcal{G}'$ mit drei nichtkollinearen Grundpunkten.*
2. *$\mathcal{G}_o$ läßt sich mit Hilfe eines assoziativen Rechtsquasikörpers beschreiben.*

BEWEIS. 1. $\rightarrow$ 2. In $\overline{\mathcal{G}_o}$ setzen wir $U = A_3$ und haben zunächst nach Satz 5, daß $\mathfrak{K}$ eine cartesische Gruppe ist. In den A_2 -Ebenen von $\mathcal{G}_o$ gilt daher der affine kleine Desargues mit Zentrum A_2 (vgl. den Beweis von Satz 5), in den A_1 -Ebenen der nämliche Satz mit Zentrum A_1 . Da man jetzt in $\overline{\mathcal{G}_o}$ alle diese Ebenen in der Richtung U auf die Ebenen durch A_1, A_2 projizieren kann, gilt in den letzteren der affine kleine Desargues für zwei verschiedene Zentren. Es handelt sich also um Translationsebenen ([4], S. 67 und 199f.) und $\mathfrak{K}$ ist daher ein Rechtsquasikörper.

Um die Assoziativität einzusehen, schneide man eine Ebene $z = ay$ mit einer Ebene $y = bx$. Man erhält

$$z = a(bx) = ux$$

für ein $u \in \mathfrak{R}$ identisch in x . Mit $x=1$ folgt $u=ab$. Da a, b, x beliebig sind liefert das die behauptete Beziehung.

2. $\rightarrow$ 1. Ist

$$z = ay + b$$

eine beliebige Quasiebene, die U als Richtung enthält, und schneidet man sie mit der A_2 -Ebene

$$y = cx + d,$$

so folgt aus der Assoziativität und Rechtsdistributivität:

$$z = a(cx + d) + b = (ac)x + (ad + b).$$

Das Schnittgebilde ist also wieder eine Gerade. Das Gleiche folgt für den Schnitt mit A_1 -Ebenen. Man kann daher U als dritten Grundpunkt auffassen und erhält ein Gefüge $\mathcal{G}'$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Zum Schluß folgen die angekündigten Kennzeichnungen der dreidimensionalen projektiven Räume (Satz I und Satz II im 1. Abschnitt):

SATZ 8. *Folgende Eigenschaften eines 2-Gefüges $\mathcal{G}$ sind gleichwertig:*

1. $\mathcal{G}$ ist Subgefüge eines 4-Gefüges $\mathcal{G}'$ mit nicht lauter kollinearen Grundpunkten.

2. In $\mathcal{G}$ gilt der Oktaedersatz (s. Abschnitt 1).

3. $\mathcal{G}$ ist Subgefüge eines dreidimensionalen projektiven Raumes, d.h. jedes zugehörige affine Gefüge $\mathcal{G}_\omega$ wird durch einen Schiefkörper beschrieben.

BEWEIS. 1. $\rightarrow$ 3. Wir haben drei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Grundpunkte A von $\mathcal{G}'$ sind nicht komplanar.

b) Die Grundpunkte A sind komplanar, aber zu je dreien nicht kollinear.

c) Drei der Grundpunkte A sind kollinear.

In allen drei Fällen können wir etwa annehmen, daß A_1, A_2, A_3 nicht kollinear sind (A_1, A_2 die Grundpunkte von $\mathcal{G}$). Dann folgt nach Satz 7, daß man bei geeigneter Koordinateneinführung einen assoziativen Rechtsquasikörper als Koordinatenbereich erhält. Wir haben daher nur noch das Links-distributivgesetz einzusehen:

a) In einem $\mathcal{G}_\omega$ setzen wir $O = A_4$. Dann schneiden sich $z = ax + by$ und $y = x$ stets in einer Geraden, also gilt

$$z = ax + bx = ux = (a + b)x$$

für alle $a, b, x \in \mathfrak{R}$.

b) Wir wählen A_4 in einem $\mathcal{G}_\omega$ als Richtung der „Raumdiagonalen“ OD des „Einheitswürfels“ (vgl. Fig. 5). Dann ist

$$z = ax + (1 - a)y$$

eine A_4 -Ebene (man bestimmt b in $z = ax + by$, indem man $D = (1, 1, 1)$ einsetzt). Sie schneidet $y = bx$ in einer Geraden, also gilt

$$z = ax + (1 - a)(bx) = ux = [a + (1 - a)b]x.$$

Setzen wir $c = (1 - a)b$, dann durchläuft c bei beliebigem, festem $a \neq 1$ sämtliche Elemente von $\mathfrak{R}$ (man kann stets nach b auflösen), also gilt

$$ax + cx = (a + c)x$$

für alle $a, c, x \in \mathfrak{R}$ (bei $a = 1$ vertausche man a und c).

c) In $\mathcal{G}$ sind jetzt A_1, A_2, A_4 kollinear, d.h. man kann $\mathcal{G}_\omega$ mit Hilfe eines Linksquasikörpers beschreiben. Wählt man dabei U als Richtung A_3 , so erhält man einen Koordinatenbereich, der zugleich Links- und assoziativer Rechtsquasikörper, also Schiefkörper ist.

3. $\rightarrow$ 1. und 3. $\rightarrow$ 2. folgen aus bekannten Eigenschaften des projektiven Raumes.

2. $\rightarrow$ 3. Der Oktaedersatz läßt sich als Veblen-Youngsches Viereckaxiom deuten ([6], S. 16):

(VY) Sind keine drei der Punkte A, B, C, D kollinear und schneiden sich AB und CD , dann schneiden sich auch AC und BD ,

jedoch mit der Einschränkung, daß keins der Paare $A, B; C, D; A, C; B, D$ in einer $A_1 A_2$ -Ebene liegt (sonst existieren AB usw. im allgemeinen auch gar nicht). In einem $\mathcal{G}_\omega$ wenden wir diese Eigenschaft folgendermaßen an:

Sei eine beliebige Quasiebene gegeben, seien a, b zwei ihrer Schargeraden und sei g ihre Schnittgerade mit ε , wo ε die zur Definition von $\mathcal{G}_\omega$ benutzte Ebene ist. Ist $P \in a; Q \in b$ und liegen P, Q nicht in der gleichen $A_1 A_2$ -Ebene, dann schneidet PQ nach (VY) die Gerade g in einem Punkt R (Fig. 6). Dann trifft aber PQ , wieder nach (VY), auch jede weitere Schargerade der Quasiebene. Folglich schneiden sämtliche A_1 - und sämtliche A_2 -Ebenen die Quasiebene in Geraden.

— Hingegen wissen wir — nach Definition von $\mathcal{G}_\omega$ — von den $A_1 A_2$ -Ebenen nur, daß sie die Quasiebene durch U in Geraden schneiden¹⁵⁾. Zunächst hat man somit nach Satz 7 (mit $U = A_3$), daß $\mathfrak{R}$ ein assoziativer Rechtsquasikörper ist.

Wir betrachten eine Quasiebene

$$z = ax + y$$

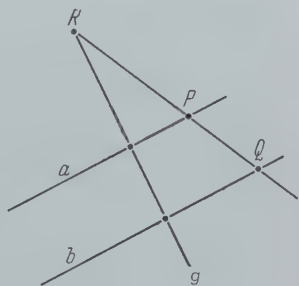


Fig. 6

¹⁵⁾ Für den Nachweis, daß die $A_1 A_2$ -Ebenen auch die anderen Quasiebene in Geraden schneiden, scheinen die synthetischen Schlußweisen zu versagen. Hier kommt die Koordinatenrechnung zu Hilfe.

und schneiden sie mit der A_2 -Ebene $y = bx$. Nach dem eben Bewiesenen ist das Schnittgebilde dieser Ebenen eine Gerade, also gilt

$$z = ax + bx = ux = (a + b)x$$

für beliebige $a, b, x \in \mathfrak{K}$. — Damit ist Satz 8 bewiesen.

In Satz 8 werden $\mathcal{G}_\omega$ und $\mathcal{G}'_\omega$ durch den gleichen Schiefkörper beschrieben. Daraus (oder auch aus einer konstruktiven Überlegung mit Hilfe des Begriffes eines natürlichen Ergänzungsraumes) folgt:

(7.1) *Ein projektiver dreidimensionaler Raum ist durch jedes 2-Gefüge, das Subgefüge von ihm ist, bereits bestimmt.*

Wegen (7.1) kann man die Bedingungen 1., 2. von Satz 8 als Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume bezeichnen.

Abschließend zeigen wir:

(7.2) *Die Aussage von Satz III (Abschnitt 1) gilt für die 3. und 4. Tabellenzeile. Daraus folgt auch Satz I (Abschnitt 1).*

BEWEIS. Man stellt eine entsprechende Überlegung an wie in (6.5), wobei man die Sätze 7 und 8 benutzt.

Literatur

- [1] EWALD, G.: Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität in Möbius-Ebenen. Math. Ann. **142**, 1—21 (1961).
- [2] EWALD, G.: Schwach projektive Räume über dreifachen Ternärkörpern. Vortragsauszug, Utrecht 1959.
- [3] HALL, M.: Projective Planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943).
- [4] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin 1955.
- [5] SPERNER, E.: Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen. J. für reine u. angew. Math. **204**, 205—215 (1959).
- [6] VEBLEN, O., and W. YOUNG: Projective Geometry, 2. Aufl., Bd. I. Boston 1916.
- [7] WINTERNITZ, A.: Zur Begründung der projektiven Geometrie. Einführung idealer Elemente, unabhängig von der Anordnung. Ann. of Math. **41**, 365—390 (1940).

*Oberwolfach-Walke, Mathematisches Forschungsinstitut
bzw. Mainz, Mathematisches Institut der Universität*

(Eingegangen am 18. Juni 1960)

Translationsgruppen in verallgemeinerten dreidimensionalen projektiven Räumen*)

Von

GÜNTER EWALD

Einleitung

In einer vorangehenden Arbeit [2] haben wir verallgemeinerte dreidimensionale projektive Räume, sog. *projektive Gefüge* oder *n-Gefüge* eingeführt und betrachtet. Wir studieren in der vorliegenden Arbeit Translationsgruppen in projektiven Gefügen. Grundlage hierfür bieten zwei Sätze über die Erweiterung von Translationen projektiver Ebenen zu solchen von projektiven Gefügen (s. unten Sätze 1 und 3).

Es ergeben sich bemerkenswerte Zusammenhänge mit den Translationsgruppen von Translationsebenen¹⁾. Einmal lassen sich die *n-Gefüge* mit kollinearen Grundpunkten und $n \geq 3$ durch direkte Produkte solcher Gruppen kennzeichnen (Satz 2); zum andern geben wir ein räumliches Gegenstück zu den Translationsgruppen von Translationsebenen an (Satz 4).

Eine Kenntnis der Arbeit [2] wird vorausgesetzt, insbesondere im Hinblick auf Bezeichnungen.

1. Kollineationen und Translationen in Gefügen

Unter einer *Kollineation* eines Gefüges $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{M}, \mathfrak{P})$ (s. [2], Abschnitt 1) verstehen wir eine eindeutige Abbildung der Menge der Punkte von $\mathcal{G}$ auf sich, die kollineare Punkte in kollineare Punkte überführt. Eine Kollineation heiße *zentral*, wenn sie alle Punkte einer vorgegebenen Ebene, der *Fixebene*, und alle Geraden durch einen vorgegebenen Punkt, das *Zentrum*, festlät. Liegt das Zentrum auf der Fixebene, so sprechen wir von einer *Elation* oder einer *Translation* (von einer Elation meist dann, wenn mehrere Abbildungen dieser Art mit verschiedenen Fixebenen gleichzeitig betrachtet werden).

Sei $\mathcal{G}_\omega$ ein zu $\mathcal{G}$ gehöriges affines Gefüge. Wir können diejenigen Kollineationen von $\mathcal{G}$, die ω festlassen, auch als Kollineationen von $\mathcal{G}_\omega$ auffassen. Insbesondere gilt das für die Translationen mit Fixebene ω .

In einer projektiven Ebene definieren wir die (*ebenen*) *Kollineationen* in derselben Weise als eindeutige geradentreue Abbildungen der Menge der Punkte auf sich. Läßt eine Kollineation alle Punkte einer Geraden g und alle Geraden durch einen Punkt C fest, so heißt sie (*ebene*) *zentrale Kollineation* mit *Zentrum* C und *Achse* g . Ist $C \in g$, so sprechen wir wieder von einer *Elation* oder einer *Translation*.

*) Habilitationsschrift Mainz 1960, II. Teil (vgl. [2]).

¹⁾ Siehe J. ANDRÉ [1]; vgl. G. PICKERT [3], S. 199f.

Die identische Abbildung bezeichnen wir sowohl bei den ebenen wie bei den räumlichen Kollineationen mit 1. — Aus den Definitionen folgt:

(1.1) Eine zentrale Kollineation eines Gefüges induziert in jeder projektiven Ebene, die durch das Zentrum verläuft, eine ebene zentrale Kollineation mit gleichem Zentrum und einer in der Fixebene der räumlichen zentralen Kollineation gelegenen Achse.

Für Elationen gilt folgende teilweise Umkehrung von (1.1):

SATZ 1. In einem Gefüge $\mathcal{G}$, dessen Grundpunkte in einer Ebene α liegen, läßt sich jede Elation σ einer A -Ebene ε mit Zentrum A und einer mit A und α inzidenten Achse eindeutig zu einer Elation des Gefüges mit α als Fixebene und A als Zentrum erweitern.

BEWEIS. Seien A_1, A_2 Grundpunkte und sei etwa $A_2 \notin \varepsilon$. Ist X ein beliebiger, nicht auf $A_1 A_2$ gelegener Punkt von $\mathcal{G}$, so setzen wir („ $a \varepsilon$ “ bedeute den Schnittpunkt von a und ε):

$$X^\sigma = (A_1 X) [(A_2 X) \varepsilon]^\sigma A_2$$

(vgl. Fig. 1). Dieser Punkt existiert, da $A_1, (A_2 X) \varepsilon$ und $[(A_2 X) \varepsilon]^\sigma$ nach Annahme kollinear sind, also zusammen mit X in einer Ebene durch A_2

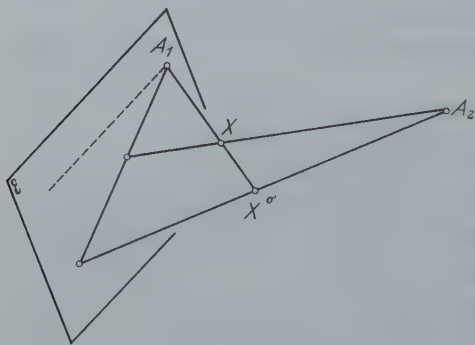


Fig. 1

liegen. Für $X \in A_1 A_2$ setzen wir $X^\sigma = X$. Dann ist σ für alle Punkte von $\mathcal{G}$ erklärt und stellt für sie eine eineindeutige Abbildung dar. α bleibt bei σ punktweise fest. Alle übrigen Ebenen durch A_1 gehen als Ganzes in sich über, während die Ebenen durch A_2 untereinander vertauscht werden. Mithin gehen alle Geraden in Geraden über, die Schnitt einer A_1 - und A_2 -Ebene bzw. Schnitt zweier A_1 -Ebenen bzw. Schnitt zweier A_2 -Ebenen sind. Es bleibt also

noch der Fall zu untersuchen, daß eine Gerade a die Gerade $A_1 A_2$ schneidet. Wir legen durch a eine Ebene β , die weder A_1 noch A_2 enthält. γ sei die durch a, A_1, A_2 bestimmte Ebene. Punkte von β gehen bei σ wieder in komplanare Punkte über (man lege jeweils Geraden von β , die $A_1 A_2$ nicht treffen, hindurch; diese schneiden sich zu je zweien, also schneiden sich auch ihre Bildgeraden). Da γ bei σ in sich übergeht, wird a auf eine Gerade abgebildet.

Ist σ' eine weitere Elation von $\mathcal{G}$ mit Fixebene α , die in ε die ebene Elation σ induziert, dann liefert $\sigma' \sigma^{-1}$ die Identität in ε und in α , läßt also sämtliche Punkte von $\mathcal{G}$ fest (man lege durch einen beliebigen Punkt X zwei Geraden, die ε und α je in verschiedenen Punkten treffen). Folglich gilt $\sigma' = \sigma$. — Damit ist Satz 1 bewiesen.

Ist α eine Ebene, die sämtliche Grundpunkte enthält, dann bezeichnen wir mit $T_A(\alpha)$ die von allen Translationen mit Zentrum A und Fixebene α erzeugte Gruppe. $T_A(\alpha)$ induziert in einer A -Ebene nach (1.1) eine ebene Translationsgruppe $T'_A(\alpha)$. Erweitert man diese wiederum gemäß Satz 1, dann erhält man $T_A(\alpha)$ zurück. Aus dem Beweis von Satz 1 geht hervor:

(1.2) Es gilt $T_A(\alpha) \cong T_{A'}(\alpha)$.

Seien A, B zwei feste verschiedene Grundpunkte. Wir betrachten die Gruppen $T_A(\alpha)$ und $T_B(\alpha)$, wo α wieder sämtliche Grundpunkte (insbesondere also A, B) enthält. Wir bezeichnen mit $T(A, B, \alpha)$ die von $T_A(\alpha)$ und $T_B(\alpha)$ erzeugte Gruppe.

(1.3) Es gilt $T(A, B, \alpha) = T_A(\alpha) \times T_B(\alpha)$
(direktes Produkt).

BEWEIS. Wir zeigen zuerst $T_A(\alpha) \cap T_B(\alpha) = 1$: Ist $\tau \in T_A(\alpha) \cap T_B(\alpha)$ und ist X ein Punkt mit $X^\tau \neq X$, so folgt nach Definition von $T_A(\alpha)$ bzw. $T_B(\alpha)$, daß $A \in XX^\tau$ und $B \in XX^\tau$, also $X \in AB$ ist. Die Punkte von AB sind jedoch Fixpunkte, was einen Widerspruch ergibt. Also ist $\tau = 1$.

Seien nun $\tau \in T_A(\alpha)$ und $\tau' \in T_B(\alpha)$ beliebig. Wir zeigen $\tau\tau' = \tau'\tau$, woraus zusammen mit dem eben Bewiesenen (1.3) folgt: Für einen beliebigen Punkt $X \notin \alpha$ fallen die Geraden AX^τ und $AX^{\tau'\tau}$ zusammen, ebenso BX^τ und $BX^{\tau'\tau}$ (Fig. 2).

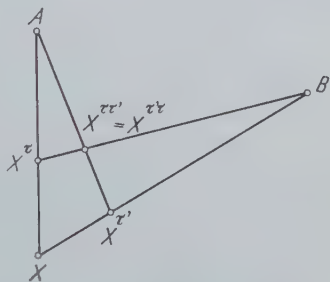


Fig. 2

Ferner gilt $X^{\tau'\tau} = (X^\tau)^\tau \in BX^\tau$
und $X^{\tau\tau'} = (X^{\tau'})^{\tau'} \in AX^{\tau'}$,

also $X^{\tau'\tau} = (BX^\tau) (AX^{\tau'}) = X^{\tau\tau'}$. Dies ergibt $\tau\tau' = \tau'\tau$.

Jedes Gefüge $\mathcal{G}$ kann man genau einer der folgenden 4 Klassen zuordnen:

- $\mathcal{G}$ ist maximales 2-Gefüge.
- $\mathcal{G}$ ist Subgefüge eines maximalen n -Gefüges mit lauter kollinearen Grundpunkten und $n \geq 3$.
- $\mathcal{G}$ ist Subgefüge eines maximalen Gefüges mit genau drei nichtkollinearen Grundpunkten.
- $\mathcal{G}$ ist Subgefüge eines projektiven dreidimensionalen Raumes.

Jeder dieser Stufen läßt sich gemäß [2], Satz III eine bestimmte Klasse von Koordinatenkörpern zuordnen:

- Zweifache Ternärkörper, die nicht Links- oder assoziative Rechtsquasikörper sind.
- Linksquasikörper, die nicht Schiefkörper sind.
- Assoziative Rechtsquasikörper, die nicht Schiefkörper sind.
- Schiefkörper.

Fall d) führt auf die bekannten dreidimensionalen projektiven Räume; wir behandeln ihn daher nicht näher. — Hinsichtlich Fall a) sei ohne Beweis bemerkt, daß man — gestützt auf kollineationsfreie projektive Ebenen — solche 2-Gefüge finden kann, die keine Kollineationen gestatten. Die beiden folgenden Abschnitte sind den Fällen b) und c) gewidmet.

2. Die Elationsgruppe von Gefügen mit kollinearen Grundpunkten

Wir betrachten jetzt den oben genannten Fall b). Sei g die Trägergerade der sämtlichen Grundpunkte. Ebenen, die sämtliche Grundpunkte enthalten, nennen wir g -Ebenen. Nach [2], Satz III lassen sich die A -Ebenen durch Linksquasikörper beschreiben, sind also Duale von Translationsebenen. Daraus folgt insbesondere unter Beachtung von (1.1) und Satz 1, daß jede Gruppe $T_A(\alpha)$ auf sämtlichen Geraden durch A (A weggelassen), die nicht in α liegen, minimal einfach transitiv operiert. Hieraus folgert man mit Hilfe von (1.3):

(2.1) $T(A, B, \alpha) = T_A(\alpha) \times T_B(\alpha)$ operiert minimal einfach transitiv auf den um g verminderten g -Ebenen.

Mit $T(\alpha)$ bezeichnen wir die von allen $T_A(\alpha)$ erzeugte Gruppe ($A \in \mathfrak{A}$ beliebig).

(2.2) Besitzt eine Abbildung aus $T(\alpha)$ einen nicht in α gelegenen Fixpunkt, so ist sie die Identität.

BEWEIS. Sei F der Fixpunkt, X ein beliebiger Punkt mit $X \neq F$; $X \notin \alpha$; X sei nicht in der durch F bestimmten g -Ebene gelegen, und τ sei die angenommene Abbildung. Die Gerade XF schneidet α in einem Punkt $A \neq F$, geht also bei τ in sich über. Da auch die g -Ebenen bei τ auf sich abgebildet werden, bleibt daher im Falle, daß X und F nicht in der gleichen g -Ebene liegen, der Punkt X fest. Liegen aber X und F in derselben g -Ebene, so ersetzt man F durch einen Punkt einer anderen g -Ebene (dieser ist nach dem eben Bewiesenen Fixpunkt) und wendet den gleichen Schluß an.

(2.3) Es gilt $T(\alpha) = T(A, B, \alpha) = T_A(\alpha) \times T_B(\alpha)$ für beliebige $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $A \neq B$.

BEWEIS. Sei $\tau \in T(\alpha)$ und $P^\tau \neq P$. Nach (2.1) existiert ein $\tau' \in T(A, B, \alpha)$ mit $P^{\tau'} = P^\tau$. Es folgt $P^{\tau'\tau^{-1}} = P$, also nach (2.2): $\tau = \tau'$, d.h. $T(\alpha) \subset T(A, B, \alpha)$. Nach Definition von $T(\alpha)$ ist $T(A, B, \alpha) \subset T(\alpha)$, mithin $T(\alpha) = T(A, B, \alpha)$. (2.3) folgt daher unter Beachtung von (2.1).

Wir bezeichnen mit E_A die von allen $T_A(\alpha)$ bei beliebigem α und festem A erzeugte Gruppe. Schränkt man E_A gemäß (1.1) auf eine A -Ebene ε ein, so erhält man in ε die von allen Elationen mit Zentrum A erzeugte Gruppe E'_A . ε ist das Dual einer Translationsebene; daraus folgt, daß E'_A von zwei Gruppen $T'_A(\alpha)$, $T'_A(\beta)$ (vgl. (1.2)) mit $\alpha \neq \beta$ erzeugt wird und

$$E'_A = T'_A(\alpha) \times T'_A(\beta)$$

gesetzt werden kann. (1.2) liefert dann:

(2.4) $E_A = T_A(\alpha) \times T_A(\beta)$ für $\alpha \neq \beta$ beliebig.

Schließlich bezeichnen wir mit E die von sämtlichen Elationen mit einem beliebigen Zentrum $A \in \mathfrak{M}$ und einer beliebigen g -Ebene als Fixebene erzeugte Gruppe und nennen sie die *Elationsgruppe* des Gefüges mit kollinearen Grundpunkten. E ist das Erzeugnis von allen $T_A(\alpha)$ bei beliebigen A, α . (2.3) und (2.4) ergeben:

$$(2.5) \quad E = E_A \times E_B = T(\alpha) \times T(\beta) = T_A(\alpha) \times T_A(\beta) \times T_B(\alpha) \times T_B(\beta)$$

mit beliebigen A, B, α, β ; $A \neq B$; $\alpha \neq \beta$.

$$(2.6) \quad \text{Es gilt } T_A(\alpha) \cong T_B(\alpha) \cong T_A(\beta) \text{ und } E_A \cong E_B \text{ für beliebige } A, B, \alpha, \beta.$$

BEWEIS. Nach Voraussetzung gibt es ein $C \neq A, B$. Nach (2.3) gilt

$$T_A(\alpha) \times T_C(\alpha) = T_B(\alpha) \times T_C(\alpha),$$

woraus

$$T_A(\alpha) \cong [T_A(\alpha) \times T_C(\alpha)] / T_C(\alpha) = [T_B(\alpha) \times T_C(\alpha)] / T_C(\alpha) \cong T_B(\alpha)$$

folgt. Entsprechend ergibt sich $E_A \cong E_B$. Um $T_A(\alpha) \cong T_A(\beta)$ einzusehen, schränke man $T_A(\alpha)$ und $T_A(\beta)$ auf eine A -Ebene ein. Man erhält dann nach Ergebnissen über Translationsebenen isomorphe Gruppen. (1.2) liefert somit die Behauptung.

Sei G eine Translationsgruppe, durch die eine Translationsebene $\tilde{\varepsilon}$ definiert wird. Zu $\tilde{\varepsilon}$ gehört eine duale Ebene ε . In ε gibt es einen Punkt T , so daß die Gruppe aller Elationen mit Zentrum T zu G isomorph ist (ε ist eine „ (T, T) -transitive Ebene“). ε läßt sich durch einen Linksquasikörper $\mathfrak{K}$ beschreiben. Faßt man $\mathfrak{K}$ als Koordinatenbereich eines Gefüges mit kollinearen Grundpunkten auf, dann sind die A -Ebenen dieses Gefüges sämtlich zu ε isomorph ($A \leftrightarrow T$) und G ist zu den Gruppen E_A des Gefüges isomorph. Man hat also zusammen mit (2.5), (2.6):

SATZ 2. Die Elationsgruppe E eines n -Gefüges mit kollinearen Grundpunkten ist bei $n \geq 3$ zum direkten Produkt $G \times G$ einer zu einer Translationsebene (bzw. deren Dual) gehörigen Translationsgruppe G mit sich selbst isomorph. Umgekehrt gibt es zu jeder solchen Gruppe G ein n -Gefüge mit kollinearen Grundpunkten und $n \geq 3$, dessen Elationsgruppe E zu $G \times G$ isomorph ist.

3. Translationsräume

Wir betrachten jetzt ein maximales Gefüge $\mathcal{G}$ mit drei nichtkollinearen Grundpunkten A_1, A_2, A_3 (Fall c) der in Abschnitt 1 gegebenen Einteilung). Die Ebene durch A_1, A_2, A_3 bezeichnen wir mit ω . Sie kommt als einzige Fixebene von Translationen in Betracht.

Nach [2], Satz 7 ist jede Gefügeebene $\neq \omega$ eine Translationsebene, wobei die Achsen der Translationen in ω liegen. Sei ε eine solche Ebene; wir setzen voraus, daß sie nur durch einen Grundpunkt, etwa A_1 , verläuft ($A_2, A_3 \notin \varepsilon$). Sei g die Schnittgerade von ε und ω . Dann gilt:

SATZ 3. Jede Translation von ε (Achse g , Zentrum beliebig $\in g$) läßt sich zu einer Translation von $\mathcal{G}$ erweitern.

BEWEIS. Sei C das Zentrum der betrachteten (ebenen) Translation τ . Diese wird folgendermaßen auf die sämtlichen Punkte $\notin \omega$ fortgesetzt:

$$P^\tau = ([A_2 P] \varepsilon]^\tau A_2) (CP).$$

Dabei bleiben also alle Geraden durch C fest und die Ebenen durch A_2 gehen in Ebenen durch A_2 über. Dasselbe gilt aber auch für A_3 , denn es ist auch

$$P^\tau = ([A_3 P] \varepsilon]^\tau A_3) (CP).$$

Diese Gleichung ist nämlich äquivalent mit der Gültigkeit des Desargues'schen Satzes mit Zentrum C und Achse $A_2 A_3$. Im Falle $C \in A_2 A_3$ hat man den ebenen kleinen Satz von Desargues mit Achse $A_2 A_3$, der, wie wir sahen (die Ebenen des Gefüges sind Translationsebenen), erfüllt ist. Bei $C \notin A_2 A_3$ erhält man einen Fall des räumlichen Satzes von Desargues; dieser ist sofort einzusehen, da die Desarguessche Figur aus Gefügeebenen aufgebaut ist.

Somit werden auch die Geraden, die Schnitte von A_2 mit A_3 -Ebenen sind, auf Geraden abgebildet. Für Geraden, die $A_2 A_3$ schneiden, wendet man wieder einen Schluß wie im Beweis von Satz 1 an.

SATZ 4. Ein 3-Gefüge mit nichtkollinearen Grundpunkten besitzt eine Translationsgruppe $\Gamma(\omega)$ mit Fixebene ω durch die drei Grundpunkte, die auf jeder nicht in ω gelegenen Geraden (den Schnittpunkt mit ω ausgenommen) minimal einfach transitiv operiert.

BEWEIS. Sei a eine Gerade $\notin \omega$ und sei A ihr Schnittpunkt mit ω . Man findet eine Gerade g von ω , die durch A und genau einen der Grundpunkte A_1, A_2, A_3 verläuft. Dann bestimmen a und g eine Ebene ε , die die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. Da ε eine Translationsebene ist, gibt es eine (ebene) Translationsgruppe von ε , die auf den Punkten $\neq A$ von a minimal einfach transitiv operiert. Ihre Elemente können nach Satz 3 zu Translationen des Gefüges erweitert werden.

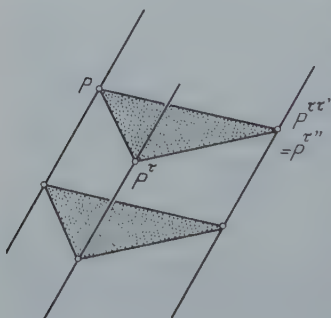


Fig. 3

Sind τ, τ' Translationen in verschiedenen Richtungen und ist $P^{\tau\tau'} \neq P$, so gibt es nach dem eben Bewiesenen eine Translation τ'' mit $P^{\tau\tau'} = P^{\tau''}$. Man hat $\tau'' = \tau\tau'$, wenn gezeigt ist, daß in $\mathcal{G}_\omega$ der affine kleine Desargues gilt (vgl. Fig. 3). Dieser folgt aber daraus, daß man nach dem ersten Teil des Beweises jedes Dreieck in jeder Richtung beliebig parallel verschieben kann.

— Somit ist $\tau\tau'$ wieder eine Translation und bilden alle Translationen mit Fixebene ω eine Gruppe $\Gamma(\omega)$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Aus dem Beweis von Satz 4 gehen unmittelbar die beiden folgenden Korollare hervor:

KOROLLAR 1 ZU SATZ 4. Es gilt (mit den Bezeichnungen von Abschnitt 1) $\Gamma(\omega) = T_1(\omega) \times T_2(\omega) \times T_3(\omega)$.

KOROLLAR 2 ZU SATZ 4. In $\mathcal{G}_\omega$ ist überall der affine kleine Satz von Desargues erfüllt (räumlich und eben).

Die Gruppe $\Gamma(\omega)$ kann als ein räumliches Analogon zu den Translationsgruppen von Translationsebenen aufgefaßt werden. Wir nennen daher ein Gefüge mit nichtkollinearen Grundpunkten auch einen *Translationsraum*.

Sei $\mathfrak{R}$ ein assoziativer Rechtsquasikörper, der $\mathfrak{G}_\omega$ als Koordinatenbereich zugeordnet ist (vgl. Abschnitt 1). $\mathfrak{R}_0$ sei der Kern von $\mathfrak{R}$, d.h. die Gesamtheit aller $x \in \mathfrak{R}$ mit

$$x(a+b) = xa + xb$$

für beliebige $a, b \in \mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}_0$ ist ein Schiefkörper. Die Gefügeebenen sind, wie wir schon sahen, Translationsebenen. Die Gruppen $\Gamma_i(\omega)$ sind nach (1.2) zu Translationsgruppen $\Gamma'_i(\omega)$ solcher Translationsebenen isomorph und können mithin (vgl. [4], S. 204) als Vektorräume über $\mathfrak{R}_0$ aufgefaßt werden. Damit hat man:

KOROLLAR 3 ZU SATZ 4. Die Gruppe $\Gamma(\omega)$ ist ein Vektorraum der Dimension $3k$ (k eine Kardinalzahl) über einem Schiefkörper (nämlich $\mathfrak{R}_0$).

Die Translationsgruppen der Translationsebenen des Gefüges sind Vektorräume der Dimension $2k$ über $\mathfrak{R}_0$. — Es ist eine offene Frage, zu welchen Vektorräumen der Dimension $2k$ über einem Schiefkörper umgekehrt Translationsebenen über assoziativen Rechtsquasikörpern gehören. Ist diese Frage beantwortet, dann weiß man auch, zu welchen Vektorräumen der Dimension $3k$ über Schiefkörpern Translationsräume gehören.

Im Falle $k=1$ ist $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}$, das Gefüge $\mathcal{G}$ also Subgefüge eines projektiven Raumes.

Literatur

- [1] ANDRÉ, J.: Über nichtdesarguesche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954).
- [2] EWALD, G.: Kennzeichnungen der projektiven dreidimensionalen Räume und nicht-desarguesche räumliche Strukturen über beliebigen Ternärkörpern. Math. Z. **75**, 395—418 (1961).
- [3] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin 1955.

Oberwolfach-Walke, Mathematisches Forschungsinstitut
bzw. Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 18. Juni 1960)

Über starke und schwache Holomorphie auf analytischen Mengen

(Führeridealgarbe und adjungierte Idealgarbe)

Von

WALTER THIMM

Einleitung

1. Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit besteht in der Untersuchung der Beziehungen zwischen zwei besonderen Holomorphiestrukturen auf ein und derselben analytischen Menge.

Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R . Man kann auf M in mannigfacher Weise einen Holomorphiebegriff einführen¹⁾. Indessen sind zwei besondere Holomorphiearten auf M ausgezeichnet:

(1) die durch die komplexe Struktur $\tilde{R}$ des Einbettungsraumes R auf M induzierte komplexe Struktur $J^2)$,

(2) die (eindeutig bestimmte) normale Holomorphiestruktur $\mathfrak{H}^3)$.

Zu (1). In die Definition der induzierten komplexen Struktur geht wesentlich die Einbettung von M in R ein. Da jedoch eine beliebige komplexe Struktur auf M lokal durch eine geeignete lokale Einbettung von M in eine komplexe Mannigfaltigkeit als induzierte komplexe Struktur realisiert werden kann⁴⁾, gelten alle Untersuchungen dieser Arbeit auch für den Fall, daß J durch eine beliebige komplexe Struktur auf M ersetzt wird.

Zu (2). Da die normale Holomorphie auf M keine komplexe Struktur auf M im Sinne der Definition von GRAUERT und REMMERT⁴⁾ ist, wird für sie die Bezeichnung „Holomorphiestruktur“ verwendet.

Um eine kurze Ausdrucksform zu haben, nennen wir die Funktionen und Funktionskeime der induzierten komplexen Struktur „stark holomorph“ und diejenigen der normalen Holomorphiestruktur „schwach holomorph“.

2. Die Strukturgarbe J der stark holomorphen Struktur ist kohärent, wie die Strukturgarbe jeder komplexen Struktur. Die Kohärenz der Strukturgarbe $\mathfrak{H}$ der schwachen Holomorphie ist eine Folgerung aus dem Satze von CARTAN-OKA über die lokale normale Einbettung einer analytischen Menge. Da gegen die Beweise dieses Satzes neuerdings Einwände erhoben werden,

¹⁾ Vgl. [5] und [9].

²⁾ Vgl. 1.4.

³⁾ Vgl. 1.5.

⁴⁾ [5], S. 280.

führen wir die Kohärenz von $\mathfrak{N}$ als Voraussetzung für diejenigen Sätze ein, deren Beweise auf dieser Kohärenz beruhen. Das sind die Sätze 2, 4, 7, 9 und 11. Dagegen gelten die Sätze 1, 3, 5, 6, 8 und 10 unabhängig von der Kohärenz von $\mathfrak{N}$ ^{4a)}.

3. Untersuchungen über die Beziehungen zwischen starker und schwacher Holomorphie werden auch in der Arbeit [9] des Verfassers angestellt — jedoch mit ganz anderer Zielsetzung als in der vorliegenden Arbeit. Dort handelt es sich um das Fortsetzungsproblem der Spureigenschaft schwach holomorpher Funktionen: Die Funktion f sei auf M schwach holomorph, $f \in \mathfrak{N}(M)$; sie sei auf der offenen Teilmenge $M' \subset M$ stark holomorph, $f \in J(M')$. Gibt es eine M' umfassende offene Teilmenge M'' von M , $M' \subset M'' \subset M$, derart, daß f sogar in M'' stark holomorph ist, d.h. $f \in J(M'')$? Insbesondere wird folgende Frage beantwortet: Welche Eigenschaften müssen M' und M'' haben, damit $J(M') = J(M'')$ ist?

4. In der vorliegenden Arbeit werden die Strukturgarben starker und schwacher Holomorphie mit einer Methode untersucht, die der Algebra und der algebraischen Geometrie entlehnt ist und die durch die Bezeichnungen „Führerideal“ und „adjungiertes Ideal“ charakterisiert werden kann. In der Algebra definiert man das Führerideal folgendermaßen⁵⁾.

Es sei P ein Ring und Σ die algebraische Abschließung von P im Quotientenring P/P . Das Führerideal von Σ in P ist die Menge aller $c \in P$ mit der Eigenschaft: $c \cdot \Sigma \subset P$.

Das Führerideal ist das P -Ideal der Annulatoren des Restklassenringes Σ/P . Da der algebraischen Abschließung in der Lehre von den Holomorphiestrukturen die normale Holomorphiestruktur entspricht⁶⁾, ist die sinngemäße Übertragung: Die Führeridealgarbe der Holomorphiestruktur $\mathfrak{N}$ in der komplexen Struktur J ist die Annulatoridealgarbe von J bezüglich der Quotientengarbe $\mathfrak{N}/J$, vgl. Definition 2. $\mathfrak{F}$ ist eine J -Idealgarbe auf M . Eine einfache Folgerung aus der Definition von $\mathfrak{F}$ ist die genaue Bestimmung der Nullstellenmenge von $\mathfrak{F}$: Diese Menge besteht aus den nicht normalen Punkten von M (Satz 1). Wenn die Strukturgarbe $\mathfrak{N}$ der schwachen Holomorphie kohärent ist, so ist auch die Führeridealgarbe kohärent (Satz 2)^{4a)}.

5. In der algebraischen Geometrie stellt man dem Führerideal das adjungierte Ideal zur Seite; seine Definition lautet⁷⁾: Es sei K ein Körper und $K[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in den Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$. Es sei i ein Ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$ und P der Restklassenring $K[x_1, \dots, x_n]/i$. Ferner sei α der natürliche Homomorphismus $K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow P$. Dann sei Σ die

^{4a)} Zusatz bei der Korrektur: Der Verfasser hat inzwischen einen eigenen Beweis des Cartan-Okaschen Einbettungssatzes gefunden; dieser Beweis beruht auf Satz 1a seiner Arbeit [8]. Die Voraussetzung der Kohärenz der Garbe $\mathfrak{N}$ der schwachen Holomorphie in den Sätzen 2, 4, 7, 9 und 11 der vorliegenden Arbeit ist überflüssig.

⁵⁾ [2], S. 135.

⁶⁾ [5], S. 285.

⁷⁾ [2], S. 135.

algebraische Abschließung von P im Quotientenring P/P und $\mathfrak{F}$ das Führerideal von $\mathcal{L}$ in P . Man bezeichnet das Ideal $\alpha = \alpha^{-1}(\mathfrak{F})$ als adjungiertes Ideal von i .

In ähnlicher Weise verknüpfen wir mit der Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ der analytischen Menge M in der komplexen Mannigfaltigkeit R (Strukturgarbe $\tilde{R}$ eine $\tilde{R}$ -Idealgarbe, die für ganz R definiert und als adjungierte Idealgarbe α von M bezeichnet wird. Ihre Definition kann so formuliert werden: Ist $x \in R$ kein Punkt von M , so sei der Halm $\alpha_x = \tilde{R}_x$. Ist x ein Punkt von M , so sei α_x die Menge aller Elemente von $\tilde{R}_x$, deren Spur auf M zum Halm $\mathfrak{F}_x$ der Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ gehört, vgl. Definition 3.

Die Nullstellenmenge der adjungierten Idealgarbe α ist die Menge der nicht normalen Punkte von M (Satz 3). Wenn die Strukturgarbe der schwachen Holomorphie kohärent ist, so ist auch α kohärent (Satz 4)^{4a)}.

6. Der älteste Satz über die adjungierte Idealgarbe ist das *Lemma von OSGOOD* über den universellen Nenner. Eine in R holomorphe Funktion D heiße universeller Nenner von M in R , wenn D auf keinem Primkeim von M identisch verschwindet und in jedem Punkte $x \in R$ zum Halm α_x der adjungierten Idealgarbe α gehört. Als Lemma von OSGOOD gilt die Aussage, daß *jeder Punkt x von M eine Umgebung U_x in R besitzt, in der $M \cap U_x$ einen universellen Nenner hat.*

Dieser Satz kann unabhängig von der Kohärenz der Strukturgarbe bewiesen werden, aus der er andererseits eine unmittelbare Folge ist. *Setzt man die Kohärenz von $\mathfrak{N}$ voraus und nimmt man dazu noch an, daß R eine Steinsche Mannigfaltigkeit ist, so kann die Existenz eines universellen Nenners für ganz M in R bewiesen werden (Satz 7)^{4a)}.*

7. Wie einfache Beispiele zeigen, ist die Berechnung der Halme der Führeridealgarbe — oder äquivalent dazu die der adjungierten Idealgarbe — eine schwierige Aufgabe. Dieses Problem wird (ohne die Voraussetzung der Kohärenz von $\mathfrak{N}$) für den folgenden Spezialfall gelöst: Im Punkte $x \in M$ habe M einen Primkeim M_x^d , dessen Singularitätenmenge in x einen gewöhnlichen Punkt hat oder leer ist, so daß bei der Wahl geeigneter lokaler Koordinaten in x M_x^d eine „Puisseuxentwicklung“ mit holomorphen Koeffizienten besitzt (vgl. Formel (19)). Fassen wir die von M_x^d verschiedenen Primkeime von M in x zu dem analytischen Mengenkeim M_x^* zusammen, so lassen sich für alle Punkte $y \in M_x^d$ einer Umgebung von x , die nicht auf einer analytischen Ausnahmemenge der Dimension $d-2$ liegen, diejenigen Elemente von $\mathfrak{F}_y$ (bzw. α_y) bestimmen, die auf M_y^* identisch verschwinden, insbesondere also die vollen Halme $\mathfrak{F}_y$ bzw. α_y , wenn M_y^* leer ist. Diese Elemente werden nämlich in solchen Punkten durch eine Aussage über die Vielfachheit des Verschwindens auf der Singularitätenmenge von M_x^d bestimmt (Satz 8). Wenn die analytische Menge M lokal irreduzibel und rein d -dimensional ist, gelingt so die Berechnung der Führeridealgarbe und der adjungierten Idealgarbe in allen Punkten von M , die nicht zu einer bestimmten $d-2$ -dimensionalen analytischen Teilmenge von M gehören.

8. Die Ergebnisse des Satzes 8 werden zum Beweise einer lokalen Eigenschaft der adjungierten Idealgarbe verwendet (Satz 9): *Die adjungierte Idealgarbe a sei in der Umgebung des Punktes $x \in M$ kohärent^{4a)}. Ist a_x der Halm der adjungierten Idealgarbe a in x , so ist die Spur eines meromorphen Funktionskeimes p_x/q_x auf M mit $p_x, q_x \in \tilde{R}_x, q_x \not\equiv 0$ auf den Primkeimen von M in x , dann und nur dann schwach holomorph, wenn für alle $\alpha_x \in a_x$ die Spur von $\alpha_x p_x/q_x$ auf M stark holomorph ist.*

9. Die weiteren Untersuchungen dieser Arbeit setzen die Existenz eines universellen Nenners D für M voraus, vgl. 6. Unter dieser Annahme gelingt es, die Zählerfunktionen der stark und der schwach holomorphen Funktionskeime auf M zu charakterisieren. Dazu werden die folgenden $\tilde{R}$ -Idealgarben eingeführt:

(a) Idealgarbe m der analytischen Menge M , vgl. 3.1.

(b) $i = (m, D)$, vgl. 7.1.

(c) $n = (m, D): a$, vgl. 8.1.

m und i sind kohärent. Setzen wir die Kohärenz der Strukturgarbe $\mathfrak{R}$ der schwachen Holomorphie voraus, so ist auch n kohärent. Sodann gelten die folgenden Sätze:

Die Spur eines meromorphen Funktionskeimes Q_x/D auf M , $Q_x \in \tilde{R}_x$, ist dann und nur dann stark holomorph auf M in x , wenn $Q_x \in i_x$ ist (Satz 10).

Die Strukturgarbe der schwachen Holomorphie $\mathfrak{R}$ sei kohärent^{4a)}. Die Spur eines meromorphen Funktionskeimes Q_x/D , $Q_x \in \tilde{R}_x$, auf M ist dann und nur dann schwach holomorph auf M in $x \in M$, wenn $Q_x \in n_x$ ist (Satz 11).

Diese Ergebnisse können dazu verwendet werden, um die in der Arbeit [9] behandelten Fortsetzungsprobleme von einem allgemeineren und höheren Standpunkt aus zu behandeln. Diese Aufgabe soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

§ 1. Starke und schwache Holomorphie auf einer analytischen Menge

1.1. Bei den folgenden Untersuchungen werden Begriffe wie „komplexe Mannigfaltigkeit“, „Strukturgarbe der komplexen Struktur“, „analytische Garbe“, „analytische Menge“ u. a. in der üblichen Weise verwendet. Bezüglich ihrer Definition werde auf die Arbeiten von GRAUERT und REMMERT (vgl. [5] und [6]) verwiesen.

1.2. Es sei R eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die Strukturgarbe der in R holomorphen Funktionen werde mit $\tilde{R}$ bezeichnet. Ist x ein Punkt von R , so bezeichne $\tilde{R}_x$ den Ring der holomorphen Funktionskeime in x .

1.3. Es sei M eine analytische Menge in R . Alle Untersuchungen dieser Arbeit beziehen sich auf die beiden folgenden Holomorphiebegriffe auf M :

(1) die durch die komplexe Struktur $\tilde{R}$ des Einbettungsraumes R auf M induzierte komplexe Struktur, die wir „starke“ Holomorphie nennen,

(2) die normale Holomorphiestruktur auf M , die sog. „schwache“ Holomorphie.

1.4. Starke Holomorphie.

Die Strukturgarbe J der starken Holomorphie wird durch ein Garbendatum folgendermaßen definiert:

Es sei U eine offene Teilmenge von M . Eine Funktion f in U heiße holomorph in der induzierten komplexen Struktur oder kurz „stark“ holomorph,

$$(1) \quad f \in J(U),$$

genau dann, wenn es im Einbettungsraum R eine offene Menge $\tilde{U}$ mit der Eigenschaft:

$$(2) \quad M \cap \tilde{U} = U$$

und in $\tilde{U}$ eine in der Struktur $\tilde{R}$ des Einbettungsraumes holomorphe Funktion $\tilde{f}$,

$$(3) \quad \tilde{f} \in \tilde{R}(\tilde{U}),$$

gibt, so daß f die Spur von $\tilde{f}$ auf U ist:

$$(4) \quad \tilde{f}|_U = f.$$

Die Elemente der Halme J_x in den Punkten x von M kennzeichnen wir ebenso als „stark“ holomorphe Funktionskeime.

Aus der allgemeinen Theorie komplexer Strukturen folgt⁸⁾:

Die Strukturgarbe J der starken Holomorphie ist kohärent.

1.5. Schwache Holomorphie.

Die Definition der normalen Holomorphiestruktur erfolgt zunächst auf der Normalisierung (M^*, μ) von $M^9)$. Hierfür definieren wir die Strukturgarbe $\mathfrak{N}^*$ mittels eines Garbendatums:

Es sei U^* eine offene Teilmenge von M^* . Eine Funktion f^* in U^* heiße holomorph,

$$(5) \quad f^* \in \mathfrak{N}^*(U^*),$$

wenn sie (a) stetig, (b) auf der komplexen Mannigfaltigkeit der gewöhnlichen Punkte von U^* holomorph ist.

Die Projektion μ von M^* auf M ermöglicht die Einführung der normalen Holomorphiestruktur auf M . In der Bezeichnung von LERAY¹⁰⁾ ist ihre Strukturgarbe $\mathfrak{N}$ die 0. Bildgarbe $\mu_0(\mathfrak{N}^*)$ der Garbe $\mathfrak{N}^*$.

Etwas konkreter kann die Garbe $\mathfrak{N}$ durch ein Garbendatum folgender Art definiert werden¹¹⁾:

⁸⁾ [6], S. 420.

⁹⁾ [5], S. 254.

¹⁰⁾ [6], S. 413.

¹¹⁾ [9], § 1.

Es sei U eine offene Teilmenge von M . Eine Funktion f in U heiße holomorph in der normalen Holomorphiestruktur $\mathfrak{H}$ oder kurz „schwach“ holomorph,

$$(6) \quad f \in \mathfrak{H}(U),$$

wenn es eine holomorphe Funktion f^* in $U^* = \mu^{-1}(U)$ gibt,

$$(7) \quad f^* \in \mathfrak{H}^*(\mu^{-1}(U)),$$

so daß $f = f^* \circ \mu^{-1}$ ist. Die Klasse der schwach holomorphen Funktionen kann auch folgendermaßen beschrieben werden¹¹⁾: f ist genau dann schwach holomorph in U , wenn f (a) in der komplexen Mannigfaltigkeit der gewöhnlichen Punkte von U holomorph, (b) lokal beschränkt ist. Die zweite Bedingung bedeutet: Ist x ein Punkt von U , so gibt es eine Umgebung U_x von x mit $U_x \subset U$ und dazu eine Konstante $c(U_x) > 0$, so daß $|f| < c(U_x)$ in U_x ist.

Die Eigenart dieses Begriffes der schwachen Holomorphie liegt darin, daß eine Funktion $f \in \mathfrak{H}(U)$ in einem Punkte von U , in dem die analytische Menge M mehrere Primkeime hat, mehrdeutig sein kann, indem sie auf den verschiedenen Primkeimen verschiedene Grenzwerte annimmt. Übrigens findet sich dieser Holomorphiebegriff schon im Lehrbuch von OSGOOD¹²⁾.

Als schwach holomorphe Funktionskeime in dem Punkte $x \in M$ bezeichnen wir die Elemente des Halmes $\mathfrak{H}_x$.

1.6. Aus den Definitionen 1.4 und 1.5 folgt, daß J eine Untergarbe von $\mathfrak{H}$ ist,

$$(8) \quad J \subset \mathfrak{H},$$

denn jede in einem Gebiete $U \subset M$ stark holomorphe Funktion ist dort auch schwach holomorph. Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig; vielmehr gibt sie Anlaß zur Definition der Normalität:

Definition 1.¹³⁾ Die analytische Menge M heiße normal im Punkte $x \in M$, wenn die Halme starker und schwacher Holomorphie J_x und $\mathfrak{H}_x$ in x übereinstimmen.

 2. Die Führeridealgarbe

2.1. Zur Untersuchung der Beziehungen zwischen den Strukturgarben der starken und schwachen Holomorphie auf der analytischen Menge M wird in Analogie zur Algebra eine J -Idealgarbe über der analytischen Menge M , die Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$, eingeführt, vgl. Einleitung 4.

Definition 2. Auf der analytischen Menge M sei J die Strukturgarbe der starken Holomorphie¹⁴⁾ und $\mathfrak{H}$ die Strukturgarbe der schwachen Holomorphie¹⁵⁾. Die „Führeridealgarbe“ $\mathfrak{F}$ der Holomorphiestruktur $\mathfrak{H}$ in der komplexen Struktur J sei eine J -Idealgarbe über M ; sie werde durch Angabe der Halme $\mathfrak{F}_x$ in den Punkten $x \in M$ folgendermaßen definiert:

¹²⁾ [J], S. 113.

¹³⁾ [g], S. 100.

¹⁴⁾ Vgl. 1.4.

¹⁵⁾ Vgl. 1.5.

(1) $\mathfrak{F}_x$ bestehe aus stark holomorphen Funktionskeimen in x :

$$(9) \quad \mathfrak{F}_x \subset J_x.$$

(2) Ein Element $\varphi_x \in J_x$ gehöre genau dann zu $\mathfrak{F}_x$, wenn

$$(10) \quad \varphi_x \cdot \mathfrak{N}_x \subset J_x$$

gilt.

Nach GRAUERT und REMMERT¹⁶⁾ wird durch Definition 2 eine J -Idealgarbe über M bestimmt; in ihrer Bezeichnung handelt es sich um die Annulatoridealgarbe von J bezüglich der Quotientengarbe $\mathfrak{N}/J$:

$$(11) \quad \mathfrak{F} = J^{\mathfrak{N}/J}.$$

2.2. Eine einfache Folgerung aus der Definition ist eine Aussage über die Nullstellenmenge der Führeridealgarbe.

Satz 1. *Es sei M eine analytische Menge in einer komplexen Mannigfaltigkeit. Die Nullstellenmenge der Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ ist genau die Menge der nicht normalen Punkte von M .*

Beweis. (1) In einem normalen Punkte $x \in M$ ist $\mathfrak{N}_x = J_x$, d.h. $\mathfrak{F}_x = (1)$ und daher $\mathfrak{F} \neq 0$ in x .

(2) In einem nicht normalen Punkte $x \in M$ ist $\mathfrak{F}_x \neq (1)$, und daher ist x Nullstelle von $\mathfrak{F}$.

2.3. Die Kohärenz der Führeridealgarbe hängt eng mit der Kohärenz der Strukturgarbe $\mathfrak{N}$ zusammen (vgl. Einleitung 2).

Satz 2. *Es sei M eine analytische Menge in einer komplexen Mannigfaltigkeit. Wenn die Strukturgarbe $\mathfrak{N}$ der schwachen Holomorphie kohärent ist, so ist auch die Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ kohärent¹⁸⁾.*

Beweis. Die Kohärenz von $\mathfrak{F}$ folgt aus dem Satz von GRAUERT und REMMERT über die Kohärenz von Annulatoridealgarben¹⁷⁾ bei kohärenten Garben¹⁸⁾.

§ 3. Die adjungierte Idealgarbe

3.1. Wie man in der algebraischen Geometrie dem Führerideal das adjungierte Ideal zur Seite stellt, so verknüpfen wir mit der Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ der analytischen Menge M in der komplexen Mannigfaltigkeit R eine $\tilde{R}$ -Idealgarbe über ganz R , die wir adjungierte Idealgarbe nennen, vgl. Einleitung 5. Vor dieser Definition werde an einen bekannten Begriff der Theorie der analytischen Garben erinnert:

Zu der analytischen Menge M in R gehört eine kohärente $\tilde{R}$ -Idealgarbe $\mathfrak{m}$, deren Definition lautet:

Ist U eine offene Teilmenge von R , so bestehe das Garbendatum $\mathfrak{m}(U)$ aus allen in U in der Struktur $\tilde{R}$ holomorphen Funktionen, die auf $M \cap U$ verschwinden.

¹⁶⁾ [6], S. 399.

¹⁷⁾ [6], S. 401.

¹⁸⁾ [6], S. 400.

3.2. Definition 3. Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R . Zu M gehöre die Führeridealgarbe $\tilde{\mathfrak{F}}$ (vgl. Definition 2). Die adjungierte Idealgarbe $\mathfrak{a}$ werde durch die folgende Festsetzung ihrer Halme definiert:

- (1) Ist x ein Punkt von $R - M$, so sei $\mathfrak{a}_x = \tilde{R}_x$ (vgl. 1.2).
- (2) Ist x ein Punkt von M , so bestehe $\mathfrak{a}_x$ aus allen Elementen von $\tilde{R}_x$, deren Spur auf M ein Element von $\tilde{\mathfrak{F}}_x$ ist.

3.3. Da die Nullstellen der adjungierten Idealgarbe genau die Nullstellen der Führeridealgarbe sind, ergibt sich aus Satz 1:

Satz 3. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R . Die Nullstellenmenge der adjungierten Idealgarbe von M ist genau die Menge der nicht normalen Punkte von M .*

3.4. Ist $\mathfrak{m}$ die zu M gehörende Idealgarbe (vgl. 3.1), so folgt aus der Definition 3:

$$(12) \quad \mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}.$$

Betrachten wir nun die exakte $\tilde{R}$ -Sequenz:

$$(13) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{m} \rightarrow 0$$

mit der Quotientengarbe $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$. Für alle Punkte $x \in R - M$ ist der Halm $(\mathfrak{a}/\mathfrak{m})_x = (0)_x$. In Punkten $x \in M$ besteht ein natürlicher $\tilde{R}_x$ -Isomorphismus $(\mathfrak{a}/\mathfrak{m})_x \leftrightarrow \tilde{\mathfrak{F}}_x$, der durch die Bildung der Spur der Funktionskeime von $\tilde{R}_x$ auf M induziert wird. Dabei geht $\tilde{R}_x$ in J_x und $(\mathfrak{a}/\mathfrak{m})_x$ in $\tilde{\mathfrak{F}}_x$ über. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$ $\tilde{R}$ -isomorph ist zu der trivialen Fortsetzung $\tilde{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}$ auf R , die wie üblich durch $\tilde{\mathfrak{F}}_x = \tilde{\mathfrak{F}}_x$ in $x \in M$ und $\tilde{\mathfrak{F}}_x = (0)_x$ in $x \in R - M$ definiert wird. Ohne die Exaktheit der $\tilde{R}$ -Sequenz (13) zu stören, können wir in ihr $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$ durch die $\tilde{R}$ -isomorphe Garbe $\tilde{\mathfrak{F}}$ ersetzen; d.h. die $\tilde{R}$ -Sequenz:

$$(14) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \tilde{\mathfrak{F}} \rightarrow 0$$

ist exakt. Ist die Führeridealgarbe $\mathfrak{F}$ kohärent, so ist auch ihre triviale Fortsetzung $\tilde{\mathfrak{F}}$ kohärent¹⁹⁾. Daraus folgt wegen des Satzes 2:

Satz 4. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R . Wenn die Strukturgarbe der schwachen Holomorphie auf M kohärent ist, so ist die adjungierte Idealgarbe von M kohärent^{4a)}.*

§ 4. Der universelle Nenner

4.1. Eine Aussage über die adjungierte Idealgarbe ist das sog. Lemma von OSGOOD. Dieser Satz handelt von der Existenz eines universellen Nenners. Um ihn einfach formulieren zu können, führen wir für einen Sachverhalt, der auch bei späteren Untersuchungen häufig wiederkehrt, eine kurze Bezeichnung ein.

¹⁹⁾ [6], S. 409.

Definition 4. Es sei M_x ein analytischer Mengenkeim im Punkte x einer komplexen Mannigfaltigkeit R . Es seien p_x und q_x holomorphe Funktionskeime in x in der Struktur $\tilde{R}_x$ des Einbettungsraumes R . $q(x)$ verschwinde auf keinem Primkeim von M_x identisch²⁰⁾. Der schwach holomorphe Funktionskeim $\varphi_x \in \mathfrak{R}_x$ heiße Spur des (meromorphen) Funktionskeimes p_x/q_x auf M_x

$$(15) \quad \varphi_x = \left. \frac{p_x}{q_x} \right|_{M_x},$$

wenn $\varphi(x)$ in allen denjenigen Punkten von M_x die Spur von p_x/q_x auf M_x ist, in denen $q_x \neq 0$ ist.

4.2. Nun werde der Begriff des universellen Nenners definiert.

Definition 5. (a) Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R . $\mathfrak{a}$ sei die adjungierte Idealgarbe von M . Eine in R holomorphe Funktion D heiße universeller Nenner von M in R , wenn

(1) D auf keinem Primkeim von M identisch verschwindet,

(2) D in jedem Punkte $x \in R$ zum Halm $\mathfrak{a}_x$ von $\mathfrak{a}$ gehört.

(b) Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R . Es sei x ein Punkt von M . Eine in x holomorphe Funktion $D_x \in \tilde{R}_x$ heiße (lokaler) universeller Nenner von M in x , wenn es eine Umgebung U_x von x in R gibt, derart, daß D_x universeller Nenner von $M \cap U_x$ in U_x ist.

4.3. Aus den Definitionen 3, 4 und 5 folgt unmittelbar:

Satz 5. Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R . Für M existiere in R ein universeller Nenner D (vgl. Definition 5). Es sei y ein beliebiger Punkt von M und φ_y irgendein schwach holomorpher Funktionskeim auf M in y . Dann gibt es in y einen in der Struktur $\tilde{R}_y$ des Einbettungsraumes holomorphen Funktionskeim $P_y \in \tilde{R}_y$, so daß φ_y die Spur von P_y/D auf M ist, vgl. Definition 4.

$$(16) \quad \varphi_y = \left. \frac{P_y}{D} \right|_M.$$

Bemerkung. Im Falle eines lokalen universellen Nenners D_x im Punkte $x \in M$ gibt es eine Umgebung U_x von x , derart, daß die Aussage von Satz 5 mit $D = D_x$ in jedem Punkte y von $M \cap U_x$ gilt.

4.4. Die Existenz des lokalen universellen Nenners ist der Inhalt des Lemmas von OSGOOD.

Satz 6. Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R . Für jeden Punkt x von M gibt es einen lokalen universellen Nenner (vgl. Definition 5).

Beweis. Für den Fall, daß M in x irreduzibel ist, findet sich dieser Satz bei OSGOOD²¹⁾. OKA²²⁾ hat zuerst bemerkt, daß die Schlußweise von OSGOOD

²⁰⁾ Ist $\mathfrak{m}_x$ das Ideal von M_x in $\tilde{R}_x$, so kann dieser Sachverhalt durch die Idealgleichheit $\mathfrak{m}_x : q_x = \mathfrak{m}_x$ ausgedrückt werden.

²¹⁾ [1], S. 116.

²²⁾ [3], S. 263.

noch anwendbar ist, wenn M in x reindimensional ist. HITOTUMATU²³⁾ hat das Lemma sodann auch für gemischtdimensionales M bewiesen. Unabhängig von HITOTUMATU hat der Verfasser einen Beweis des Lemmas gefunden, der nun kurz skizziert werden soll.

Ist die Dimension von R in der Umgebung von x gleich n , so läßt sich ein rein $n - 1$ -dimensionaler analytischer Mengenkeim M_x^{n-1} in x mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

(a) Der Mengenkeim M_x von M in x liegt auf M_x^{n-1} . Es gibt also eine Umgebung U_x von x in R , so daß für die Repräsentanten $M(U_x)$ und $M^{n-1}(U_x)$ von M_x bzw. M_x^{n-1} in U_x gilt:

$$M(U_x) \subset M^{n-1}(U_x).$$

(b) Kein Primkeim von $M(U_x)$ liegt auf der Singularitätenmenge von $M^{n-1}(U_x)$.

(c) Ist $y \in M(U_x)$ und $\varphi_y \in \mathfrak{N}_y$, so existiert in y ein schwach holomorpher Funktionskeim Φ_y auf $M^{n-1}(U_x)$, so daß gilt:

$$(17) \quad \Phi_y|_M = \varphi_y.$$

$M^{n-1}(U_x)$ wird durch eine einzige analytische Gleichung $F(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ in den lokalen Koordinaten von R in x beschrieben. Dabei dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß F ein Pseudopolynom von u_n ist. Die lokalen Koordinaten können wegen der Eigenschaft (b) von $M^{n-1}(U_x)$ so gewählt werden, daß die Diskriminante $D(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ von F bezüglich u_n auf keinem Primkeim von $M(U_x)$ identisch verschwindet. Diese Diskriminante ist in U_x ein universeller Nenner von M ; denn ist $y \in M(U_x)$ und $\varphi_y \in \mathfrak{N}_y$, so existiert in y wegen (c) ein schwach holomorpher Funktionskeim Φ_y auf M^{n-1} , so daß (17) gilt. Auf Φ_y ist die Okasche Verallgemeinerung des Ergebnisses von OSGOOD anwendbar:

$$(18) \quad \Phi_y = \frac{P_y}{D}|_{M^{n-1}}, \quad P_y \in \tilde{R}_y.$$

Weil D auf keinem Primkeim von $M(U_x)$ in y identisch verschwindet, gilt dann auch:

$$\varphi_y = \frac{P_y}{D}|_M.$$

Bemerkung. Wenn die Garbe $\mathfrak{N}$ der schwachen Holomorphie kohärent ist, so ist Satz 6 eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Kohärenz.

4.5. Satz 6 sichert die Existenz eines lokalen universellen Nenners ohne die Voraussetzung der Kohärenz der Strukturgarbe $\mathfrak{N}$ der schwachen Holomorphie. Setzen wir diese Kohärenz jedoch voraus, und ist ferner R eine Steinsche Mannigfaltigkeit, so besitzt M sogar einen universellen Nenner in ganz R (vgl. Definition 5(a)).

²³⁾ [7].

Satz 7. *Es sei R eine Steinsche Mannigfaltigkeit und M eine analytische Menge in R . Die Strukturgarbe der schwachen Holomorphie auf M sei kohärent²⁴⁾. Dann existiert für M in R ein universeller Nenner.*

Beweis. Gemäß Satz 4 ist die adjungierte Idealgarbe $\mathfrak{a}$ kohärent. In der Steinschen Mannigfaltigkeit R gilt das Theorem A von H. CARTAN²⁴⁾. Dieser Satz liefert für $\mathfrak{a}$ das Ergebnis:

Es gibt ein abgeschlossenes $\tilde{R}(R)$ -Ideal $\mathfrak{A}$ von in R holomorphen Funktionen, so daß $\mathfrak{A}$ in jedem Punkte x von R den Halm $\mathfrak{a}_x$ des adjungierten Ideals $\mathfrak{a}$ von M erzeugt.

Auf das $\tilde{R}(R)$ -Ideal $\mathfrak{A}$ ist der folgende Satz von GRAUERT²⁵⁾ anwendbar:

Es sei $\{x_v\}$ eine Folge von Punkten in R , die keine Nullstellen des abgeschlossenen $\tilde{R}(R)$ -Ideals $\mathfrak{A}$ sind. Dann gibt es im Ideal $\mathfrak{A}$ eine Funktion D mit $D(x_v) \neq 0$ für alle v .

Die analytische Menge M zerfällt in abzählbar unendlich viele irreduzible Komponenten. Auf jeder von diesen wählen wir einen gewöhnlichen Punkt aus. Nach Satz 3 ist keiner dieser Punkte eine Nullstelle von $\mathfrak{A}$. Aus dem Satze von GRAUERT ergibt sich Satz 7, wenn wir für die Punkte x_v die soeben ausgewählten Punkte nehmen.

§ 5. Berechnung der Führeridealgarbe und der adjungierten Idealgarbe für spezielle analytische Mengen

5.1. Die Berechnung der Führeridealgarbe oder der adjungierten Idealgarbe ist im allgemeinen ein schwieriges Problem, das nur für spezielle analytische Mengen lösbar ist. Ein solcher Spezialfall wird in diesem Paragraphen behandelt. Wir beginnen mit einer Definition:

Definition 6. Es sei M_x^d ein Primkeim im Punkte x einer komplexen Mannigfaltigkeit. Es sei möglich, lokale Koordinaten $u_1, u_2, \dots, u_n$ in der Umgebung von x so einzuführen, daß M_x^d eine Darstellung der folgenden Art besitzt:

$$(19) \quad \begin{cases} u_d = t^k, & k \geq 1, \\ u_{d+\mu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{(\mu)}(u_1, \dots, u_{d-1}) t^{\nu}, & \mu = 1, \dots, n-d. \end{cases}$$

Ist J_{d-1} der Ring der holomorphen Funktionskeime von $u_1, \dots, u_{d-1}$ im Punkte $\{u_1=0, \dots, u_{d-1}=0\}$, so sind alle Koeffizienten $a_{\nu}^{(\mu)} \in J_{d-1}$. Mit Q_x^{d-1} werde der Primkeim $u_d=0, u_{d+1}=0, \dots, u_n=0$ bezeichnet, der auf M_x^d durch $t=0$ bestimmt wird. Jeder schwach holomorphe Funktionskeim $f_x \in \mathfrak{R}_x$ besitzt auf M_x^d eine Potenzreihendarstellung

$$(20) \quad f_x|_{M_x^d} = t^{\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}(u_1, \dots, u_{d-1}) t^{\nu}, \quad \lambda \geq 0, \quad c_0 \neq 0,$$

²⁴⁾ [6], S. 420.

²⁵⁾ [4], S. 44. GRAUERT hat diesen Satz zwar nur für das Ideal einer analytischen Menge bewiesen; sein Beweis gilt jedoch ohne wesentliche Änderung für jedes abgeschlossene Ideal.

$c_v \in J_{d-1}$, $v=0, 1, 2, \dots$. Wir bezeichnen λ als Ordnung von f_x auf Q_x^{d-1} und gebrauchen das Symbol:

$$\lambda = \text{Og. } [f_x : Q_x^{d-1}].$$

Wenn $f_x \equiv 0$ auf M_x^d ist, werde $\lambda = \infty$ gesetzt.

5.2. Der folgende Satz faßt die Ergebnisse dieser Arbeit über die Berechnung der Führeridealgarbe zusammen. Er ist unabhängig von der Kohärenz der Garbe der schwachen Holomorphie.

Satz 8. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R (Struktur $\tilde{R}$). Es sei x ein Punkt von M . In x besitze M einen Primkeim M_x^d , der in geeignet gewählten lokalen Koordinaten $u_1, u_2, \dots, u_n$ eine Darstellung der Form (19) habe. Auf M_x^d wird durch $t=0$ der Primkeim Q_x^{d-1} mit den Gleichungen $u_d=0, u_{d+1}=0, \dots, u_n=0$ bestimmt. Die von M_x^d verschiedenen Primkeime des analytischen Mengenkeimes M_x von M in x seien zu dem analytischen Mengenkeim M_x^* zusammengefaßt:*

$$(21) \quad M_x = M_x^d \cup M_x^*.$$

M_x^* kann leer sein.

Es gibt eine Umgebung U von x , eine in U holomorphe Funktion $\Delta(u_1, u_2, \dots, u_{d-1})$ und eine ganze Zahl $p \geq 0$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) M_x^d, M_x^*, Q_x^{d-1} bestimmen in U analytische Repräsentanten $M^d(U), M^*(U), Q^{d-1}(U)$.

(2) Es sei $y = \{u_1^0, \dots, u_{d-1}^0, 0, \dots, 0\}$ ein Punkt von $Q^{d-1}(U)$ mit $\Delta(u_1^0, \dots, u_{d-1}^0) \neq 0$. Die durch $M^*(U)$ bzw. $Q^{d-1}(U)$ in y bestimmten Mengenkeime seien M_y^* bzw. Q_y^{d-1} . Dann ist jeder auf M_y^* verschwindende schwach holomorphe Funktionskeim in y stark holomorph, sobald seine Ordnung auf Q_y^{d-1} mindestens p ist (vgl. Definition 6). Kein auf M_y^* verschwindender stark holomorpher Funktionskeim hat auf Q_y^{d-1} die Ordnung $p-1$ (26).

(3) Ein auf M_y^* verschwindender stark holomorpher Funktionskeim in y gehört dann und nur dann zum Halm $\mathfrak{F}_y$ der Führeridealgarbe in y , wenn seine Ordnung auf Q_y^{d-1} mindestens p ist.

(4) Kein Element von $\mathfrak{F}_y$ kann auf Q_y^{d-1} eine Ordnung $< p$ haben.

Die letzten Aussagen liefern für die adjungierte Idealgarbe folgende Ergebnisse:

(3*) Ein auf M_y^* verschwindender holomorpher Funktionskeim aus $\tilde{\mathfrak{F}}_y$ gehört dann und nur dann zum Halm α_y der adjungierten Idealgarbe, wenn seine M_y^d -Spur auf Q_y^{d-1} eine Ordnung $\geq p$ besitzt.

(4*) Kein Element von α_y kann eine M_y^d -Spur haben, deren Ordnung auf Q_y^{d-1} kleiner als p ist.

Beweis. (I) Bestimmung der Umgebung U von x .

Wir fordern von der Umgebung U von x folgende Eigenschaften:

²⁶⁾ Darüber hinaus geht die Aussage von Hilfssatz 3, vgl. S. 442.

(a) U sei das topologische Produkt einer Umgebung U_{d-1} des Nullpunktes im $\{u_1, u_2, \dots, u_{d-1}\}$ -Raum und einer Umgebung U_{n-d+1} des Nullpunktes im $\{u_d, u_{d+1}, \dots, u_n\}$ -Raum.

$$(22) \quad U = U_{d-1} \times U_{n-d+1}.$$

(b) Die Mengenkeime $M_x, M_x^d, M_x^*, Q_x^{d-1}$ haben in U analytische Repräsentanten: $M(U), M^d(U), M^*(U), Q^{d-1}(U)$.

(c) Es seien $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^d, \mathfrak{m}^*$ die Idealgarben von $M(U), M^d(U), M^*(U)$. Für alle $y \in U$ werde $\mathfrak{m}_y$ durch eine Basis von $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y^d$ durch eine Basis von $\mathfrak{m}_x^d$ und $\mathfrak{m}_y^*$ durch eine Basis von $\mathfrak{m}_x^*$ erzeugt.

(d) $M^d(U)$ besitze in U die Darstellung (19).

(e) Der universelle Nenner D_x von M in x habe in U einen holomorphen Repräsentanten D , der in jedem Punkte y von U zum Halm $\mathfrak{a}_y$ der adjungierten Idealgarbe $\mathfrak{a}$ von M gehöre und auf keinem Primkeim von $M(U)$ identisch verschwinde (vgl. Satz 6).

(II) Bezeichnungen.

(1) Es sei $J_{d-1}(U_{d-1})$ der Ring der holomorphen Funktionen von $u_1, u_2, \dots, u_{d-1}$ in U_{d-1} .

(2) Ist $y = \{u_1^0, u_2^0, \dots, u_{d-1}^0, u_d^0, \dots, u_n^0\}$ ein Punkt von U , so werde der Ring der konvergenten Potenzreihen von $u_1 - u_1^0, u_2 - u_2^0, \dots, u_{d-1} - u_{d-1}^0$ mit $J_{d-1}(y)$ bezeichnet.

(3) Ist $y \in U$, so seien die Mengenkeime von $M(U), M^d(U), M^*(U), Q^{d-1}(U)$ in y bzw. $M_y, M_y^d, M_y^*, Q_y^{d-1}$.

(4) Es sei y ein Punkt von $M(U)$. Wir nennen J_y^* bzw. $\mathfrak{N}_y^*$ die Menge aller derjenigen Elemente von J_y bzw. $\mathfrak{N}_y$, die auf M_y^* identisch verschwinden. Falls y kein Punkt von $M^*(U)$ ist, werde $J_y^* = J_y, \mathfrak{N}_y^* = \mathfrak{N}_y$ gesetzt.

Wegen der Eigenschaft (d) von U sind die Koeffizienten $a_v^{(u)}$ in (19) Elemente von $J_{d-1}(U_{d-1})$.

Aus der Eigenschaft (e) von U folgt für die Spur des universellen Nenners D auf $M^d(U)$ eine Darstellung:

$$(23) \quad D|_{M^d(U)} = t^m \sum_{v=0}^{\infty} \bar{d}_v(u_1, \dots, u_{d-1}) t^v, \quad \bar{d}_0 \neq 0,$$

mit $\bar{d}_v \in J_{d-1}(U_{d-1})$ für $v=0, 1, 2, \dots$.

(III) Grundlegend für den Beweis von Satz 8 ist das folgende Ergebnis:

Hilfssatz 1. Es sei $y = \{u_1^0, u_2^0, \dots, u_{d-1}^0, 0, \dots, 0\}$ ein Punkt von $Q^{d-1}(U)$. In y sei $d_0(u_1^0, u_2^0, \dots, u_{d-1}^0) \neq 0$ (vgl. (23)). Es gibt eine ganze Zahl $K_0 \geq 0$, derart daß alle Funktionskeime aus $\mathfrak{N}_y^*$, deren Ordnung auf Q_y^{d-1} mindestens K_0 ist, zu J_y^* gehören. Die Zahl K_0 kann für alle Punkte $y \in Q^{d-1}(U)$ mit $d_0(y) \neq 0$ gleich groß gewählt werden.

Beweis. (a) Wenn in (23) $m=0$ ist, gilt $D(y) \neq 0$. Also ist y ein normaler Punkt von $M(U)$. Es ist dann $J_y = \mathfrak{N}_y$. Die Aussagen von Satz 8 sind mit $\Delta = d_0$ und $p=0$ erfüllt. Es werde daher von nun an $m \geq 1$ vorausgesetzt.

(b) Wir setzen (vgl. (23)):

$$(24) \quad \tau^m = t^m \sum_{v=0}^{\infty} d_v(u_1, \dots, u_{d-1}) t^v.$$

Da $d_0(y) \neq 0$ ist, können wir die Gl. (24) durch eine konvergente Potenzreihe:

$$(25) \quad \tau = t \sum_{v=0}^{\infty} \delta_v(u_1, \dots, u_{d-1}) t^v$$

mit $\delta_v \in J_{d-1}(y)$, $v=0, 1, \dots$, $\delta_0(y) \neq 0$, auflösen. Aus (25) errechnet sich:

$$(26) \quad t = \tau \sum_{v=0}^{\infty} \delta'_v(u_1, \dots, u_{d-1}) \tau^v$$

mit $\delta'_0 = 1/\delta_0$, $\delta'_v \in J_{d-1}(y)$, $v=0, 1, \dots$.

Wie aus (25) folgt, ist für jedes ganze $K \geq 0$ der Funktionskeim:

$$\varphi_K^* = \begin{cases} \tau^K & \text{auf } M_y^d \\ 0 & \text{auf } M_y^* \end{cases}$$

schwach holomorph im Punkte y , also $\varphi_K^* \in \mathfrak{H}_y^*$. Wir beweisen zunächst folgende Behauptung:

(c) Für $K \geq K_0 = m^2 + 1$ ist $\varphi_K^* \in J_y^*$.

Wir verwenden die Darstellung (16) für φ_1^* :

$$D|_{M_y} \cdot \varphi_1^* = P_y(u_1, \dots, u_n)|_{M_y}, \quad P_y \in \tilde{R}_y.$$

Dann ist wegen (23) und (24):

$$D|_{M_y^d} = \tau^m,$$

und daher:

$$P_y|_{M_y^d} = \tau^{m+1}, \quad P_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Für $K \geq K_0 = m^2 + 1$ ist:

$$(27) \quad \varphi_K^* = D^{m+r-\lambda} P_y^\lambda|_{M_y},$$

wobei r und λ ganze Zahlen ≥ 0 sind, die durch die Bedingungen $K = m^2 + r m + \lambda$ und $1 \leq \lambda \leq m$ bestimmt werden. Daraus folgt (c).

(d) Es sei $f_y \in \mathfrak{H}_y^*$ mit Og. $[f_y: Q_y^{d-1}] \geq K_0$. Aus (26) folgt für f_y eine Potenzreihenentwicklung nach τ von der folgenden Gestalt:

$$f_y|_{M_y^d} = \sum_{v=K_0}^{\infty} c_v(u_1, \dots, u_{d-1}) \tau^v,$$

$c_v \in J_{d-1}(y)$, $v=K_0, K_0+1, \dots$. Ferner ist:

$$f_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Wie aus (27) folgt, ist f_y auf M_y die Spur von:

$$F_y = \sum_{\mu=1}^m D_y^{m-\mu} P_y^\mu \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{m^2+\lambda m+\mu} D^\lambda \right\}.$$

Da $F_y \in \tilde{R}_y$ ist, ergibt sich $f_y \in J_y^*$. Da $K_0 = m^2 + 1$ allein durch die Entwicklung (23) von D bestimmt wird, folgt die Aussage des Hilfssatzes über die Unabhängigkeit der Zahl K_0 von y .

(IV) Bei den folgenden Untersuchungen handelt es sich darum, Bedingungen dafür anzugeben, daß ein Funktionskeim aus $\mathfrak{N}_y^*$ zu J_y^* gehört. Es sei $(h_1, h_2, \dots, h_s)$ eine Basis des Ideals $\mathfrak{m}_x^*$ mit der in (I) (c) formulierten Eigenschaft. Diese Funktionen sind demnach in U holomorph und bilden eine Basis jedes Halmes $\mathfrak{m}_y^*$ mit $y \in U$. Es sei y ein Punkt von $M(U)$ und $f_y \in J_y^*$. Dann gibt es einen Funktionskeim $F_y \in \tilde{R}_y$, so daß

$$F_y|_{M_y} = f_y.$$

Insbesondere muß also: $F_y|_{M_y^*} \equiv 0$ sein. Daher besitzt F_y eine Darstellung:

$$(28) \quad F_y = g_1 h_1 + g_2 h_2 + \dots + g_s h_s \quad \text{mit} \quad g_\lambda \in \tilde{R}_y, \quad \lambda = 1, 2, \dots, s.$$

Wir setzen die Funktionen g_λ mit unbestimmten Koeffizienten als Potenzreihen von $u_d, u_{d+1}, \dots, u_n$ an:

$$(29) \quad g_\lambda = \sum_{v_d, v_{d+1}, \dots, v_n=0}^{\infty} \xi_{v_d v_{d+1} \dots v_n}^{(\lambda)} u_d^{v_d} u_{d+1}^{v_{d+1}} \dots u_n^{v_n}, \quad \lambda = 1, \dots, s.$$

Substituieren wir diese Entwicklungen in (28), so ist bei beliebigen $\xi_{v_d v_{d+1} \dots v_n}^{(\lambda)} \in J_{d-1}(y)$ — Konvergenz natürlich vorausgesetzt — die Spur $F_y|_{M_y^*} \equiv 0$. Nun berechnen wir durch Einsetzen der Potenzreihen (19) die Spur von F_y auf M_y^d . Ordnen wir nach Potenzen von t , so folgt:

$$(30) \quad F_y|_{M_y^d} = \sum_{v=0}^{\infty} l_v(\xi_{v_d v_{d+1} \dots v_n}^{(\lambda)}) t^v.$$

Hier sind die l_v homogene Linearformen in je endlich vielen Unbestimmten $\xi_{v_d v_{d+1} \dots v_n}^{(\lambda)}$, deren Koeffizienten zu $J_{d-1}(U_{d-1})$ gehören.

(V) **Hilfssatz 2.** Es sei $y \in Q^{d-1}(U)$ und $d_0(y) \neq 0$ (vgl. Hilfssatz 1). Es sei $\varphi_y \in \mathfrak{N}_y^*$ und:

$$(31) \quad \varphi_y|_{M_y^d} = \sum_{v=0}^{\infty} \eta_v(u_1, \dots, u_{d-1}) t^v, \quad \eta_v \in J_{d-1}(y), \quad v = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Es ist dann und nur dann $\varphi_y \in J_y^*$, wenn sich holomorphe Funktionen $\xi_{v_d v_{d+1} \dots v_n}^{(\lambda)} \in J_{d-1}(y)$ so bestimmen lassen, daß die K_0 Gleichungen:

$$(32) \quad l_v(\xi_{v_d v_{d+1} \dots v_n}^{(\lambda)}) = \eta_v, \quad v = 0, 1, \dots, K_0 - 1$$

bestehen. (Zur Bedeutung von K_0 vgl. Hilfssatz 1).

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist nach (IV) klar. Um zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist, nehmen wir an, es sei $\{\xi_{v_d v_{d+1} \dots v_n}^{(\lambda)} \in J_{d-1}(y)\}$ ein System von Lösungsfunktionen von (32). Es handelt sich um ein endliches System, da in die K_0 Gln. (32) nur endlich viele Unbestimmte eingehen.

Wir setzen diese Funktionen in die Entwicklungen (29) ein, wobei wir alle übrigen Koeffizienten, die also in den linken Seiten der Gln. (32) nicht vorkommen, gleich 0 setzen. Die Spur der mit diesen Funktionen g_λ gebildeten Funktion F_y hat die Form:

$$F_y|_{M_y^d} = \sum_{\nu=0}^{K_d-1} \eta_\nu t^\nu + \sum_{\nu=K_0}^{\infty} \zeta_\nu t^\nu \quad \text{mit} \quad \zeta_\nu \in J_{d-1}(y)$$

$$F_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Es ist also:

$$F_y|_{M_y^d} - \varphi_y|_{M_y^d} = \sum_{\nu=K_0}^{\infty} (\zeta_\nu - \eta_\nu) t^\nu$$

und

$$F_y|_{M_y^*} - \varphi_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Nach Hilfssatz 1 ist $F_y|_{M_y} - \varphi_y \in J_y^*$; d. h. es gibt einen Funktionskeim $G_y \in \tilde{R}_y$ mit:

$$G_y|_{M_y^d} = \sum_{\nu=K_0}^{\infty} (\zeta_\nu - \eta_\nu) t^\nu$$

$$G_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Daher ist φ_y auf M_y die Spur von $F_y - G_y$; d. h. $\varphi_y \in J_y^*$. Dies ist die Behauptung.

(VI) Wir wenden den Hilfssatz 2 auf die folgenden schwach holomorphen Funktionskeime in y an:

$$(33) \quad \begin{aligned} \varphi_K|_{M_y^d} &= t^K, & K \geq 0, \text{ ganz,} \\ \varphi_K|_{M_y^*} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Aus dem Hilfssatz 1 folgt: $\varphi_K \in J_y^*$ für $K \geq K_0$. Für $K < K_0$ führt die Forderung $\varphi_K \in J_y^*$ auf das folgende lineare Gleichungssystem L_K :

$$(34) \quad l_\nu(\xi_{\nu_d \nu_{d+1} \dots \nu_n}^{(\lambda)}) = \delta_{\nu K}, \quad \nu = 0, 1, \dots, K_0 - 1,$$

($\delta_{\nu K}$ = Kronecker-Symbol). Für jedes solche Gleichungssystem L_K bestehen zwei Möglichkeiten:

Fall 1. Der Rang der Koeffizientenmatrix von L_K ist verschieden von dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix von L_K . Dann ist L_K unlösbar und zwar auch mit meromorphen Funktionen von $u_1, \dots, u_{d-1}$. Dies bedeutet: φ_K ist kein Element von J_y^* , und das gleiche gilt auch für jedes Produkt $c\varphi_K$ mit $c \in J_{d-1}(y)$ und $c \not\equiv 0$.

Fall 2. Die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix von L_K stimmen überein. L_K besitzt nun Lösungen

$$\xi_{\nu_d \nu_{d+1} \dots \nu_n}^{(\lambda)} = q_{\nu_d \nu_{d+1} \dots \nu_n}^{(\lambda)} \Delta_K \quad \text{mit} \quad q_{\nu_d \nu_{d+1} \dots \nu_n}^{(\lambda)} \in J_{d-1}(y),$$

wobei Δ_K eine Determinante mit Koeffizienten von L_K ist. $\Delta_K(u_1, \dots, u_{d-1})$ ist Element von $J_{d-1}(U_{d-1})$, da die Koeffizienten der Linearformen l_ν zu $J_{d-1}(U_{d-1})$ gehören (vgl. (IV)).

Es sei $d(u_1, \dots, u_{d-1})$ das Produkt der Determinanten Δ_K aller derjenigen Gleichungssysteme L_K für $K=0, 1, 2, \dots, K_0-1$, die den Fall 2 realisieren, d.h. die meromorph lösbar sind. Die Funktion d ist in U_{d-1} holomorph. Nunmehr kann die Funktion $\Delta(u_1, \dots, u_{d-1}) \in J_{d-1}(U_{d-1})$ definiert werden, die in den Aussagen des Satzes 9 vorkommt. Wir setzen:

$$\Delta(u_1, \dots, u_{d-1}) = d_0(u_1, \dots, u_{d-1}) d(u_1, \dots, u_{d-1}).$$

Wir haben sodann folgendes Ergebnis:

Hilfssatz 3. *Es sei $y \in Q^{d-1}(U)$ und $\Delta(y) \neq 0$. Für jedes ganzzahlige $K \geq 0$ und beliebiges $c \in J_{d-1}(y)$ gilt: $c \varphi_K \in \mathfrak{N}_y^*$ (vgl. (33)) gehört dann und nur dann zu J_y^* , wenn schon $\varphi_K \in J_y^*$ ist.*

(VII) Jetzt kann die Aussage (2) von Satz 8 bewiesen werden.

Hilfssatz 4. *Es sei p die kleinste ganze Zahl, derart, daß für jedes ganze $K \geq p$ das Gleichungssystem L_K zu Fall 2 (vgl. VI) gehört. Es sei $y \in Q^{d-1}(U)$ und $\Delta(y) \neq 0$. Jeder Funktionskeim $f_y \in \mathfrak{N}_y^*$, dessen Ordnung auf Q_y^{d-1} mindestens p ist, gehört zu J_y^* . Kein Funktionskeim $f_y \in \mathfrak{N}_y^*$ mit $\text{Og. } [f_y : Q_y^{d-1}] = p-1$ gehört zu J_y .*

Beweis. Wegen der Definition von p gibt es für jedes $K \geq p$ einen Funktionskeim $F_K \in \widehat{R}_y$, so daß $\varphi_K = F_K|_{M_y}$ ist. Nun sei $f_y \in \mathfrak{N}_y^*$ mit $\text{Og. } [f_y : Q_y^{d-1}] \geq p$. Auf M_y^d besitzt f_y eine Entwicklung:

$$(35) \quad f_y|_{M_y^d} = \sum_{v=p}^{\infty} c_v t^v, \quad c_v \in J_{d-1}(y), \quad v = p, p+1, \dots;$$

außerdem gilt:

$$(36) \quad f_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Wegen der Definition von p und des Hilfssatzes 1 ist $K_0 \geq p$. Wie aus Hilfssatz 1 folgt, braucht nur gezeigt zu werden, daß der Funktionskeim $f'_y = \sum_{v=p}^{K_0} c_v \varphi_v$ zu J_y^* gehört. Dies ergibt sich aus:

$$f'_y = \sum_{v=p}^{K_0} c_v F_v|_{M_y}.$$

Ist $f_y \in \mathfrak{N}_y^*$ und $\text{Og. } [f_y : Q_y^{d-1}] = p-1$, so besitzt f_y eine Darstellung $f_y = c \varphi_{p-1} + h_y$ mit $c \in J_{d-1}(y)$ und $\text{Og. } [h_y : Q_y^{d-1}] \geq p$. Ferner ist $h_y|_{M_y^*} \equiv 0$. Wie soeben bewiesen wurde, ist also h_y in J_y^* . Nun ist jedoch $c \varphi_{p-1}$ wegen der Definition von p und des Hilfssatzes 3 kein Element von J_y ; daher ist auch f_y nicht in J_y .

(VIII) Es folgt der Beweis des ersten Teiles der Aussage (3) von Satz 8.

Hilfssatz 5. *Es sei $y \in Q^{d-1}(U)$ und $\Delta(y) \neq 0$. f_y sei ein Funktionskeim von J_y^* mit $\text{Og. } [f_y : Q_y^{d-1}] \geq p$. Dann ist $f_y \in \mathfrak{F}_y$.*

Beweis. Es sei $\varphi_y \in \mathfrak{N}_y$. Dann ist wegen (36) $\varphi_y \cdot f_y|_{M_y^*} \equiv 0$, also $\varphi_y \cdot f_y \in \mathfrak{N}_y^*$. Nun ist:

$$\text{Og. } [\varphi_y \cdot f_y : Q_y^{d-1}] = \text{Og. } [\varphi_y : Q_y^{d-1}] + \text{Og. } [f_y : Q_y^{d-1}] \geq p.$$

Aus Hilfssatz 4 ergibt sich $\varphi_y \cdot f_y \in J_y^*$. Da diese Aussage für jedes Element von $\mathfrak{N}_y$ gilt, ist $f_y \in \mathfrak{F}_y$. Dies ist die Behauptung.

(IX) Der Beweis von Satz 8 wird beendet durch den Beweis der Aussage (4), aus welcher der zweite Teil der Aussage (3) folgt:

Hilfssatz 6. *Es sei $y \in Q^{d-1}(U)$ und $\Delta(y) \neq 0$. Der Funktionskeim $g_y \in J_y$ habe auf Q_y^{d-1} eine Ordnung $K \leq p-1$. Dann ist g_y kein Element von $\mathfrak{F}_y$.*

Beweis. Wäre $g_y \in \mathfrak{F}_y$, so müßte für jedes Element $\varphi_y \in \mathfrak{N}_y$ folgen $g_y \cdot \varphi_y \in J_y$. Nehmen wir $\varphi_y = \varphi_{p-K-1}$ (vgl. (33)), so ist $g_y \cdot \varphi_{p-K-1} \in \mathfrak{N}_y^*$ und $\text{Og.}[g_y \cdot \varphi_{p-K-1}; Q_y^{d-1}] = p-1$; also gehört nach Hilfssatz 4 der Funktionskeim $g_y \cdot \varphi_{p-K-1}$ nicht zu J_y . Daher ist g_y nicht in $\mathfrak{F}_y$.

5.3. Wenn der analytische Mengenkeim M_y^* leer ist, so ist $J_y^* = J_y$, $\mathfrak{N}_y^* = \mathfrak{N}_y$ (vgl. (II) (4)). Der Satz 8 beschreibt nun die vollen Halme $\mathfrak{F}_y$ bzw. $\mathfrak{a}_y$ in den Punkten von $M \cap U$ mit $\Delta(y) \neq 0$. Diese Situation liegt insbesondere dann in allen Punkten von M vor, wenn die analytische Menge M lokal irreduzibel ist. In diesem Falle ermöglicht der Satz 8 die Berechnung der Führeridealgarbe bzw. adjungierten Idealgarbe in allen Punkten von M mit Ausnahme der Punkte einer Teilmenge von M , die dünn von der Codimension 2 ist.

§ 6. Eine lokale Eigenschaft der adjungierten Idealgarbe

6.1. Als Anwendung der Ergebnisse von Satz 8 soll eine lokale Eigenschaft der adjungierten Idealgarbe bewiesen werden. Dazu wird die Voraussetzung der Kohärenz der Strukturgarbe der schwachen Holomorphie gebraucht.

Satz 9. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R . x sei ein Punkt von M . Die adjungierte Idealgarbe $\mathfrak{a}$ sei in einer Umgebung von x kohärent^{4a)}. α_x sei der Halm der adjungierten Idealgarbe von M in x . Es seien p_x und q_x Funktionskeime in x , die in der Struktur des Einbettungsraumes R holomorph sind, $p_x, q_x \in \hat{R}_x$. q_x sei nicht identisch 0 auf den Primkeimen von M in x ²⁰⁾. Die Spur von p_x/q_x auf M (vgl. Definition 4) ist dann und nur dann schwach holomorph auf M ,*

$$(37) \quad \left. \frac{p_x}{q_x} \right|_M \in \mathfrak{N}_x,$$

wenn für alle Elemente $\alpha_x \in \mathfrak{a}_x$ die Spur auf M von $\alpha_x p_x / q_x$ stark holomorph ist,

$$(38) \quad \left. \frac{\alpha_x p_x}{q_x} \right|_M \in J_x.$$

Bemerkung: Satz 9 besitzt folgende interessante Formulierung:

Es sei $\mathfrak{Q}$ die Garbe der Quotientenringe von J auf M . In $\mathfrak{Q}$ gilt:

$$\mathfrak{F}^{-1} = \mathfrak{N}.$$

Dabei wird bekanntlich $\mathfrak{F}^{-1}$ durch: $(\mathfrak{F}^{-1})_x = \{r_x \in \mathfrak{Q}_x \mid r_x \cdot \mathfrak{F}_x \subset J_x\}$ definiert.

Beweis. (A) Die Notwendigkeit der Bedingung ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition 3 der adjungierten Idealgarbe. Es sei $f_x = p_x/q_x|_M \in \mathfrak{N}_x$. Für jedes Element α_x von $\mathfrak{a}_x$ ist die Spur $\alpha_x|_M = \varphi_x \in \mathfrak{F}_x$. Aus Formel (10) folgt: $f_x \cdot \varphi_x \in J_x$.

(B) Um zu zeigen, daß die Bedingung des Satzes hinreichend für schwache Holomorphie ist, führen wir den Beweis indirekt. Wir nehmen an, es gebe einen meromorphen Funktionskeim $\Psi_x = p_x/q_x$ mit den Eigenschaften:

(a) $p_x, q_x \in \tilde{R}_x$,

(b) $q_x \not\equiv 0$ auf den Primkeimen von M in x^{20} ,

(c) für alle $\alpha_x \in \mathfrak{a}_x$ gilt $\alpha_x \Psi_x|_M \in J_x$, ohne daß jedoch $\psi_x = \Psi_x|_M \in \mathfrak{N}_x$ ist.

Wegen (c) gibt es einen Primkeim M_x^d von M in x (Dimension d), so daß ψ_x auf M_x^d Polstellen besitzt. Die Polstellenmenge von ψ_x auf M_x^d ist ein $d-1$ -dimensionaler analytischer Mengenkeim Q_x^{d-1} .

(C) Wir wählen eine Umgebung V von x in R , so daß eine Basis des Halmes $\mathfrak{a}_x$ jeden Halm $\mathfrak{a}_z$ mit $z \in V$ erzeugt. ($\mathfrak{a}$ ist kohärent in einer Umgebung von x .) Diese Umgebung V sei ferner so klein, daß in ihr analytische bzw. holomorphe Repräsentanten der Mengenkeime M_x, M_x^d, Q_x^{d-1} und der Funktionskeime p_x, q_x , sowie des universellen Nenners D_x von M in x existieren. Wir bezeichnen diese Repräsentanten mit den Symbolen: $M(V), M^d(V), Q^{d-1}(V), p, q$ und setzen: $\Psi = p/q$ und $\psi = \Psi|_M$.

(D) In jedem Punkte z von $Q^{d-1}(V)$ finden wir den Sachverhalt der Annahme unserer indirekten Schlußweise wieder, d.h.

(1) z ist eine Polstelle (oder Unbestimmtheitsstelle) für ψ .

(2) Für alle $\alpha_z \in \mathfrak{a}_z$ ist $\Psi_z \cdot \alpha_z|_M \in J_z$. (Ψ_z Funktionskeim von Ψ in z ; $\psi_z = \Psi_z|_M$).

Die zweite Eigenschaft ergibt sich daraus, daß α_z eine Linearkombination von Elementen von $\mathfrak{a}_x$ mit Koeffizienten in $\tilde{R}_z$ ist und diese Eigenschaft für die Elemente von $\mathfrak{a}_x$ besteht.

(E) Jeder Punkt z von $Q^{d-1}(V)$ ist nicht normal für M .

In einem normalen Punkte $z \in M$ ist $\mathfrak{a}_z = \tilde{R}_z$ (vgl. Satz 3). Wäre also $z \in Q^{d-1}(V)$ normal, so müßte $1 \cdot \psi_z \in J_z$ sein, was unmöglich ist, wenn ψ_z in z eine Polstelle hat.

(F) Wegen (D) werden wir die Annahme der indirekten Schlußweise schon widerlegt haben, wenn uns dies für irgendeinen Punkt y von $Q^{d-1}(V)$ gelingt. Wir nehmen für y einen Punkt, in dem sich $\mathfrak{a}_y$ gemäß Satz 8 berechnen läßt.

Wir wählen zunächst einen gewöhnlichen Punkt z von $Q^{d-1}(V)$, und falls jeder Punkt von $Q^{d-1}(V)$ ein singulärer Punkt von $M^d(V)$ ist, werde z so bestimmt, daß die Singularitätenmenge von $M^d(V)$ in z einen gewöhnlichen Punkt hat. Dann gibt es lokale Koordinaten auf R in einer Umgebung von z mit z als Nullpunkt, so daß jeder Primkeim von $M^d(V)$ in z eine Darstellung der Gestalt (19) hat. Auf (19) wird $Q^{d-1}(V)$ durch $t=0$ gegeben. Möglicherweise gibt es verschiedene Primkeime (19) von $M^d(V)$ in z . Wir wählen

einen solchen aus, auf dem $\psi_z = \Psi_z|_M$ wirklich meromorph ist, d.h. für $t=0$ Polstellen hat und bezeichnen diesen mit M_z^d .

Durch Einsetzen der Potenzreihen (19) in p und q gewinnen wir für ψ_z eine Darstellung auf M_z^d :

$$(39) \quad \frac{p}{q}|_{M_z^d} = \psi_z|_{M_z^d} = \frac{1}{t^\sigma} \frac{\sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v(u_1, \dots, u_{d-1}) t^v}{\sum_{v=0}^{\infty} \beta_v(u_1, \dots, u_{d-1}) t^v},$$

α_v, β_v holomorph für $\{u_1=0, \dots, u_{d-1}=0\}$, $v=0, 1, 2, \dots$, $\alpha_0 \not\equiv 0$, $\beta_0 \not\equiv 0$. Da ψ_z auf M_z^d für $t=0$ wirklich meromorph ist, ist $\sigma \geq 1$.

(G) Auf die analytische Menge $M=M(V)$ wenden wir im Punkte z den Satz 8 (mit z an Stelle von x) an. Wir bedienen uns weiterhin der Bezeichnungen in 5.2 (I), (II) und (III). Es gibt eine Umgebung $U \subset V$ von z , eine in U holomorphe Funktion $\Delta(u_1, \dots, u_{d-1})$ und eine ganze Zahl $p \geq 0$, derart, daß die Aussagen (2), (3) und (4) in Satz 8 bestehen. Wir wählen einen Punkt $y = \{u_1^0, \dots, u_{d-1}^0, 0, \dots, 0\} \in Q^{d-1}(U)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\beta_0(u_1^0, \dots, u_{d-1}^0) \neq 0$, vgl. (39),

(b) $\Delta(u_1^0, \dots, u_{d-1}^0) \neq 0$.

Wegen (a) ist:

$$(40) \quad \psi_y|_{M_y^d} = \frac{1}{t^\sigma} \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_v(u_1, \dots, u_{d-1}) t^v, \quad \gamma_0 \not\equiv 0, \quad \sigma \geq 1,$$

mit $\gamma_v \in J_{d-1}(y)$ (vgl. 5.2 (II), (2)).

Die Funktion ψ_y hat laut Annahme unserer indirekten Schlußweise und wegen (D) die folgende Eigenschaft:

Für alle $\alpha_y \in a_y$ ist $\psi_y \cdot \alpha_y|_{M_y} \in J_y$. Um einen Widerspruch zu konstruieren, wählen wir für α_y denjenigen Funktionskeim $\Phi_{p+\sigma-1} \in \tilde{R}_y$, dessen Spur auf M_y der Funktionskeim

$$(41) \quad \varphi_{p+\sigma-1} = \begin{cases} t^{p+\sigma-1} & \text{auf } M_y^d \\ 0 & \text{auf } M_y^* \end{cases}$$

ist. Gemäß Satz 8 (2) und $\sigma \geq 1$ ist $\varphi_{p+\sigma-1} \in J_y^*$ und auf Grund von Satz 8 (3) sogar $\varphi_{p+\sigma-1} \in \mathfrak{F}_y$ und daher $\Phi_{p+\sigma-1} \in a_y$. Nun gilt wegen (40) und (41) auf $M_y = M_y^d \cup M_y^*$ (vgl. Satz 8):

$$\Phi_{p+\sigma-1} \cdot \psi_y|_{M_y^d} = \varphi_{p+\sigma-1} \cdot \psi_y|_{M_y^d} = \gamma_0 t^{p-1} + t^p \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{v+1} t^v,$$

$$\Phi_{p+\sigma-1} \cdot \psi_y|_{M_y^*} = \varphi_{p+\sigma-1} \cdot \psi_y|_{M_y^*} \equiv 0.$$

Wie aus Satz 8 (3) folgt, ist $\varphi_{p+\sigma-1} \cdot \psi_y$ genau dann in J_y , wenn

$$\gamma_0 \cdot \varphi_{p-1} = \begin{cases} \gamma_0 t^{p-1} & \text{auf } M_y^d \\ 0 & \text{auf } M_y^* \end{cases}$$

zu J_y gehört. Diese Möglichkeit wird jedoch durch die letzte Aussage in Satz 8 (2) ausgeschlossen. Damit ist die Annahme der indirekten Schlußweise widerlegt und Satz 9 bewiesen.

§ 7. Die Zählerfunktionen bei stark holomorphen Funktionskeimen

7.1. Wir fassen nun die Zählerfunktionen unserer beiden Sorten von holomorphen Funktionskeimen ins Auge. Besonders einfach lassen sich die Zähler von stark holomorphen Funktionskeimen beschreiben.

Satz 10. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R , $\mathfrak{m}$ die zu M gehörige $\tilde{R}$ -Idealgarbe (vgl. 3.1). Für M existiere ein universeller Nenner D ; vgl. Definition 5. Es sei $\mathfrak{i}$ die $\tilde{R}$ -Idealgarbe $(\mathfrak{m}, D)^{27}$. Dann ist $\mathfrak{i}$ kohärent und Untergarbe der adjungierten Idealgarbe $\mathfrak{a}$:*

$$(42) \quad \mathfrak{i} = (\mathfrak{m}, D) \subset \mathfrak{a}.$$

Es sei x ein Punkt von M und Q_x in x ein in der Struktur $\tilde{R}$ holomorpher Funktionskeim, $Q_x \in \tilde{R}_x$. Dann und nur dann ist die Spur von Q_x/D auf M (vgl. Definition 4) stark holomorph,

$$(43) \quad \left. \frac{Q_x}{D} \right|_M \in J_x,$$

wenn Q_x zu $\mathfrak{i}_x$ gehört.

Beweis. (1) Die $\tilde{R}$ -Idealgarbe $\mathfrak{i}$ ist kohärent, weil $\mathfrak{m}$ kohärent und D in R holomorph ist. Aus $D \in \mathfrak{a}_x$ in allen Punkten $x \in R$ und (12) folgt (42).

(2) Wenn die Spur von Q_x/D auf M stark holomorph ist, gibt es einen in der Struktur $\tilde{R}$ holomorphen Funktionskeim $H_x \in \tilde{R}_x$, so daß

$$(44) \quad \left. \frac{Q_x}{D} \right|_M = H_x|_M$$

gilt. Hieraus folgt $Q_x - DH_x \equiv 0$ auf M , also $Q_x - DH_x \in \mathfrak{m}_x$ und deswegen $Q_x \in \mathfrak{i}_x$.

(3) Aus $Q_x \in \mathfrak{i}_x$ folgt umgekehrt die Existenz von $m_x \in \mathfrak{m}_x$ und $H_x \in \tilde{R}_x$, so daß $Q_x = m_x + DH_x$ gilt. Da D auf keinem Primkeim von M identisch verschwindet, kann diese Gleichung durch D dividiert werden und liefert (44); also ist die Spur von Q_x/D auf M (vgl. Definition 4) ein Element von J_x .

7.2. Auf der Untersuchung der $\tilde{R}$ -Idealgarbe $\mathfrak{i} = (\mathfrak{m}, D)$ beruhen die Arbeiten des Verfassers zum Spurproblem von holomorphen Funktionen auf analytischen Mengen, vgl. [8] und [9]. Auf jene Fragen können mit den Methoden der vorliegenden Arbeit neue Antworten gefunden werden. Hier soll ein anderes Problem behandelt werden. Nachdem es gelungen ist, die Zähler von stark holomorphen Funktionskeimen zu beschreiben, stellt sich dieselbe Aufgabe für die Zähler der schwach holomorphen Funktionskeime.

²⁷⁾ Das heißt für $x \in R$ ist $\mathfrak{i}_x = (\mathfrak{m}_x, D)$ das Vereinigungsideal von $\mathfrak{m}_x$ und D in $\tilde{R}_x$.

§ 8. Die Zählerfunktionen bei schwach holomorphen Funktionskeimen

8.1. Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R , $\mathfrak{m}$ die $\tilde{R}$ -Idealgarbe von M und $\mathfrak{a}$ die adjungierte Idealgarbe von M . Für M existiere ein universeller Nenner D . Zur Charakterisierung der Zählerfunktionen bei schwach holomorphen Funktionskeimen definieren wir die folgende $\tilde{R}$ -Idealgarbe:

$$(45) \quad \mathfrak{n} = (\mathfrak{m}, D) : \mathfrak{a}.$$

Dieses Symbol hat folgende Bedeutung:

(1) Für $x \in R - M$ sei der Halm $\mathfrak{n}_x = \tilde{R}_x$,

(2) für $x \in M$ sei $\mathfrak{n}_x$ die Menge aller Funktionskeime $Q_x \in \tilde{R}_x$ mit:

$$(46) \quad Q_x \cdot \mathfrak{a}_x \subset (\mathfrak{m}_x, D).$$

In der Bezeichnung von GRAUERT und REMMERT ist $\mathfrak{n}$ die Annulatoridealgarbe von $\tilde{R}$ bezüglich der Quotientengarbe $\mathfrak{a}/(\mathfrak{m}, D)$, vgl. (42).

8.2. Nun gilt der folgende Satz:

Satz 11. *Es sei M eine analytische Menge in der komplexen Mannigfaltigkeit R und $\mathfrak{m}$ die zu M gehörende Idealgarbe (vgl. 3.1). Die Strukturgarbe $\mathfrak{R}$ der schwachen Holomorphie auf M sei kohärent^{4a}). Zu M existiere ein universeller Nenner D . Es sei $\mathfrak{a}$ die adjungierte Idealgarbe von M . Dann ist die in 8.1 eingeführte $\tilde{R}$ -Idealgarbe $\mathfrak{n} = (\mathfrak{m}, D) : \mathfrak{a}$ kohärent. Es sei x ein Punkt von M und Q_x ein in der Struktur $\tilde{R}$ holomorpher Funktionskeim, $Q_x \in \tilde{R}_x$.*

Dann und nur dann ist die Spur von Q_x/D auf M (vgl. Definition 4) ein schwach holomorpher Funktionskeim in x ,

$$(47) \quad \frac{Q_x}{D} \Big|_M \in \mathfrak{R}_x,$$

wenn $Q_x \in \mathfrak{n}_x$ ist.

Beweis. (a) Die Kohärenz von $\mathfrak{n}$ folgt aus der Kohärenz von $\mathfrak{a}$ (Satz 4), der Kohärenz von $(\mathfrak{m}, D)$ (Satz 10) und dem Satz über die Kohärenz von Annulatoridealgarben (vgl. 8.1)¹⁷).

(b) Wenn $\frac{Q_x}{D} \Big|_M \in \mathfrak{R}_x$ ist, so ist laut Definition 3:

$$(48) \quad \alpha_x \frac{Q_x}{D} \Big|_M \in I_x.$$

Aus Satz 10 folgt nun $\alpha_x Q_x \in (\mathfrak{m}_x, D)$. Da diese Relation für jedes $\alpha_x \in \mathfrak{a}_x$ besteht, gilt (46), d.h. $Q_x \in \mathfrak{n}_x$.

(c) Die Umkehrung ergibt sich mit $q_x = D$ und $p_x = Q_x$ aus Satz 9. In der Tat, wenn für alle $\alpha_x \in \mathfrak{a}_x$ gilt: $\alpha_x Q_x \in (\mathfrak{m}_x, D)$, so ist gemäß Satz 10 für alle solchen α_x die Formel (48) richtig. Aus Satz 9 folgt daher:

$$(49) \quad \frac{Q_x}{D} \Big|_M \in \mathfrak{R}_x.$$

Literatur

- [1] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1929.
- [2] GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie. Wien u. Innsbruck 1949.
- [3] OKA, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII. J. Math. Soc. Japan **3**, 259—278.
- [4] GRAUERT, H.: Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik. Math. Ann. **131**, 38—75 (1956).
- [5] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958).
- [6] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Bilder und Urbilder analytischer Garben. Ann. of Math. **68**, 393—443 (1958).
- [7] HITOTUMATU, S.: Note on the Holomorphy on an analytic subset. Fac. Science, Univ. Tokyo **7**, 604—613 (1958).
- [8] THIMM, W.: Über Moduln und Ideale von holomorphen Funktionen mehrerer Variablen. Math. Ann. **139**, 1—13 (1959).
- [9] THIMM, W.: Untersuchungen über das Spurproblem von holomorphen Funktionen auf analytischen Mengen. Math. Ann. **139**, 95—114 (1959).

Bonn, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 13. Juli 1960)

Sur la théorie du prolongement des valuations de Krull

Par

P. RIBENBOIM

Nous faisons ici une étude systématique de la théorie du prolongement des valuations de KRULL aux extensions algébriques. Cet article est une suite à nos précédentes notes [1], [2].

Au n° 1 nous indiquons quelques résultats généraux sur le prolongement de valuations.

Au n° 2 nous considérons l'extension d'une valuation w d'un corps K à un surcorps algébrique $\tilde{K}$, sous l'hypothèse que w admette un seul prolongement à $\tilde{K}$. En particulier, nous montrons que si K , muni de w , est complet, alors $\tilde{K}$, muni de l'unique prolongement $\tilde{w}$ de w à $\tilde{K}$ est aussi complet lorsque $[\tilde{K}:K]$ est fini; le cas où l'anneau de la valuation w possède des idéaux premiers limites exige des soins particuliers.

Au n° 3 nous étudions la théorie du prolongement sans faire des hypothèses sur l'existence de prolongement unique. Après rappeler quelques résultats généraux déjà connus, nous indiquons la condition pour que deux K -automorphismes de $\tilde{K}$ définissent le même prolongement de la valuation donnée (supposée de rang fini). Ensuite, nous résolvons les questions suivantes: étant connus les prolongements $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ de la valuation w à l'extension algébrique finie $\tilde{K}|K$, déterminer les prolongements distincts des valuations moins fines que w ainsi que les prolongements distincts (dans des corps des restes convenables) des valuations obtenues de celles moins fines que w par passage aux respectifs corps des restes. Enfin, nous établissons l'importante relation $n \geq \sum_{i=1}^r e_{i0} f_i^0$ entre le degré n de l'extension $\tilde{K}|K$, les indices de ramification e_{i0} et les degrés d'inertie f_i^0 des valuations qui prolongent w (supposée de rang quelconque).

Enfin, en supposant que la valuation w possède rang fini, nous déterminons aussi des conditions suffisantes pour qu'on ait l'égalité dans la relation ci-dessus, ce qui est beaucoup plus délicat. La démonstration de l'inégalité se fait de façon très simple, tandis que pour l'égalité nous utilisons la technique d'induction selon la longueur de l'arbre engendré par l'ensemble des prolongements de w à $\tilde{K}$. COHEN et ZARISKI [3] et ROQUETTE [4] ont aussi démontré l'inégalité indépendamment et de façon distincte de la notre; toutefois, notre démonstration est certainement plus simple et directe, car il est inutile de faire une induction sur le nombre de prolongements de la valuation w comme ont fait COHEN et ZARISKI, et de même, le raisonnement de ROQUETTE est trop compliqué, en vertu de la notion peu heureuse de

complété d'un corps valué (il est reconnu que pour les valuations de rang supérieur, la bonne notion de complétion est celle de KRULL [5], plus fine que la complétion topologique qui prend en considération seulement les éléments des étages supérieurs du groupe de valeurs, c.a.d., les éléments proches de 0 dans le corps; voir aussi [2]). Quant à l'égalité, nos conditions sont les mêmes que celles de ROQUETTE; COHEN et ZARISKI ont aussi indiqué une condition suffisante pour l'égalité, qui implique notre condition lorsque w est discrète de rang 1, mais dont on ne sait pas la relation avec notre condition dans le cas général.

Nous remercions le Professeur W. KRULL par les précieuses discussions et échanges d'idées, lors de notre séjour en 1956 à l'Institut des Mathématiques de l'Université de Bonn; tous les résultats des articles [1], [2], ainsi que de celui-ci formaient l'ensemble de notre thèse de doctorat.

1.

La terminologie et les notations sont celles de nos précédentes notes déjà citées.

Dans ce n° nous donnerons quelques résultats généraux sur le prolongement de valuations.

Rappelons d'abord (KRULL [5]) que si K est un corps muni de la valuation w , si $\tilde{K}$ est un surcorps de K , alors w admet au moins un prolongement $\tilde{w}$ à $\tilde{K}$. Dans ce travail, nous sommes uniquement intéressés au prolongement de w à un surcorps algébrique fini $\tilde{K}$ de K . Si $\tilde{K}|K$ est une extension (algébrique finie) normale, alors w admet un nombre fini de prolongement distincts $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ à $\tilde{K}$, qui sont des valuations conjuguées, c.a.d., pour tout indice j ($1 \leq j \leq r$) il existe un K -automorphisme σ_j de $\tilde{K}$ tel que $\tilde{w}_j = \tilde{w}_1 \circ \sigma_j$; ainsi, le nombre de ces valuations est fini, au plus égal au nombre de K -automorphismes distincts de $\tilde{K}$ (et ainsi, au plus égal au degré $[\tilde{K}:K]$); toutefois, il se peut que deux automorphismes distincts déterminent la même valuation — ceci a été étudié pour les valuations de rang 1 et sera vu au n° 3 dans un cas plus général. Il résulte que si $\tilde{K}|K$ est une extension normale alors toutes les valuations qui prolongent w ont le même groupe de valeurs. Si par contre $\tilde{K}|K$ est une extension algébrique finie, mais non normale, alors les valuations de $\tilde{K}$ qui prolongent w sont les restrictions des prolongements de w à l'extension normale de K engendrée par $\tilde{K}$; donc, w admet aussi seulement un nombre fini de prolongements à $\tilde{K}$, dont les groupes de valeurs ne coïncident plus nécessairement. Si $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_r$ sont les anneaux des valuations de $\tilde{K}$ (non nécessairement normal) qui prolongent w , alors $\bigcap_{i=1}^r \tilde{A}_i$ est l'anneau des éléments de $\tilde{K}$, entiers sur l'anneau A de la valuation w .

Les deux lemmes suivants indiquent la nature d'un prolongement quelconque de la valuation w de K à une extension algébrique et à une extension algébrique finie.

LEMME 1. Soit K un corps muni de la valuation w , soit $\tilde{K}$ un surcorps algébrique de K et $\tilde{w}$ une valuation de $\tilde{K}$ prolongeant w . Avec notations évidentes (cf. [1], [2]) on a :

1) le groupe $\tilde{\Gamma}$ de la valuation $\tilde{w}$ est contenu dans le groupe divisible engendré par le groupe Γ de la valuation w ; donc w et $\tilde{w}$ ont le même rang (et on peut appliquer à ces valuations les résultats indiqués au lemme 1 de [2]);

2) pour tout couple d'idéaux premiers correspondants $\mathfrak{p}, \tilde{\mathfrak{p}}$, des anneaux de valuation $A, \tilde{A}$, $\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}} / \tilde{\mathfrak{p}}$ est un surcorps algébrique du corps $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}$ (après une identification canonique).

Il résulte immédiatement du fait que w et $\tilde{w}$ aient le même rang que pour tout couple d'idéaux premiers $\mathfrak{p}, \tilde{\mathfrak{p}}$ de A , $(0) \subseteq \mathfrak{p} < \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}^0$, et les correspondants idéaux premiers $\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}'$ de $\tilde{A}$, la valuation $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}'}$ de $\tilde{\mathcal{K}}$ est un prolongement de la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ de $\mathcal{K}$; en particulier, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et le correspondant idéal premier $\tilde{\mathfrak{p}}$ de $\tilde{A}$, la valuation $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ de $\tilde{K}$ est un prolongement de la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ de K .

LEMME 2. Soit $\tilde{K}$ un surcorps algébrique fini du corps K et $\tilde{w}$ une valuation de $\tilde{K}$ qui prolonge la valuation w de K . Pour tout couple d'idéaux premiers $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ de A , $(0) \subseteq \mathfrak{p} < \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}^0$, et les correspondants idéaux premiers $\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}'$ de $\tilde{A}$, on a, en plus des résultats indiqués au lemme précédent :

1) si Δ, Δ' (resp. $\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}'$) sont les sous-groupes isolés de Γ (resp. $\tilde{\Gamma}$) correspondants aux idéaux premiers $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ (resp. $\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}'$) alors $e' = (\tilde{\Delta}' : \Delta')$ divise $e = (\tilde{\Delta} : \Delta)$; en particulier, pour l'idéal premier $\mathfrak{p} = (0)$, e_0 s'appelle « l'indice de ramification » de $\tilde{w}$ sur w ; enfin, pour l'idéal premier maximal $\mathfrak{p}^0$ on a $e^0 = 1$; en outre, si la valuation w est discrète, alors $\tilde{w}$ l'est aussi.

2) $f' = [\tilde{\mathcal{K}}' : \mathcal{K}'] \leq [\tilde{\mathcal{K}} : \mathcal{K}] = f$ (avec notations évidentes); en particulier, pour l'idéal $\mathfrak{p} = (0)$ on a $f_0 = n = [\tilde{K} : K]$ et pour l'idéal premier maximal $\mathfrak{p}^0$, f^0 s'appelle le « degré d'inertie » de la valuation $\tilde{w}$ sur w .

3) $\frac{e_0}{n} \leq \frac{e}{f} \leq \frac{e'}{f'} \leq \frac{1}{f^0}$; en particulier, $e_0 \cdot f^0 \leq n$, c'est-à-dire, on a

$$(\tilde{\Gamma} : \Gamma) \cdot [\tilde{\mathcal{K}}^0 : \mathcal{K}^0] \leq [\tilde{K} : K].$$

En effet, en vertu du lemme bien connu de la théorie des groupes, on a $(\tilde{\Delta} : \Delta) = (\tilde{\Delta} / \tilde{\Delta}' : \Delta / \Delta') \cdot (\tilde{\Delta}' : \Delta')$, donc e' divise e lorsque $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$.

Puisque $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}'}$ est une valuation de $\tilde{\mathcal{K}}$, ayant corps des restes $\tilde{\mathcal{K}}'$ et prolongeant la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ de $\mathcal{K}$, ayant corps des restes $\mathcal{K}'$, alors le résultat bien connu (SCHILLING [6]) donne $f' \leq f$ lorsque $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$. De même, pour les valuations $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}'}$, $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$, on a $(\tilde{\Delta} / \tilde{\Delta}' : \Delta / \Delta') \cdot [\tilde{\mathcal{K}}' : \mathcal{K}'] \leq [\tilde{\mathcal{K}} : \mathcal{K}]$, car leurs groupes des valeurs sont respectivement $\tilde{\Delta} / \tilde{\Delta}'$, Δ / Δ' ; puisque $(\tilde{\Delta}' : \Delta')$ $(\tilde{\Delta} / \tilde{\Delta}' : \Delta / \Delta') = (\tilde{\Delta} : \Delta)$ alors on a $\frac{e}{e'} f' \leq f$.

2.

Supposons maintenant que K soit un corps muni de la valuation w et $\tilde{K}$ une extension algébrique de K telle que w admette un prolongement unique $\tilde{w}$ à $\tilde{K}$. Il est bien connu que cela arrive, par exemple, lorsque K , muni de w , est un corps henselien (en particulier maximal ou complet).

LEMME 3. Soit K , muni de w , $\tilde{K}$ un surcorps algébrique de K et supposons que w admette un seul prolongement $\tilde{w}$ à $\tilde{K}$. Pour tout couple d'idéaux premiers $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ de A , $(0) \subseteq \mathfrak{p} < \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}^0$, la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ de $\mathcal{K}$ admet un prolongement unique à $\tilde{\mathcal{K}}$, à savoir $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}'}}$, dont l'anneau de valuation $\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$ est celui des entiers algébriques de $\tilde{\mathcal{K}}$ relativement à $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$. En particulier, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ admet un prolongement unique à $\tilde{K}$, à savoir $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, dont l'anneau de valuation $\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ est celui des entiers algébriques de $\tilde{K}$ relativement à $A_{\mathfrak{p}}$.

En effet, d'abord $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}'}}$ est un prolongement de $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ à $\tilde{\mathcal{K}}$. Si $\tilde{\mathcal{B}}$ est l'anneau d'une valuation de $\tilde{\mathcal{K}}$ prolongeant $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ alors $\tilde{\mathcal{B}} \cap \mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}$, donc $\varphi^{-1}(\tilde{\mathcal{B}}) \cap A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}'}$ (où φ est l'application canonique de $\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ sur $\tilde{\mathcal{K}}$). Il suffit alors de montrer que toute valuation de $\tilde{K}$ moins fine que w admet un seul prolongement à $\tilde{K}$, car cela entraînerait $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$. Si B est l'anneau d'une valuation $\tilde{v}$ de $\tilde{K}$ qui prolonge la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ (moins fine que w) alors $\tilde{B} \cap K = A_{\mathfrak{p}} \supseteq A$, donc $\tilde{B} \supseteq \tilde{A}$ (anneau des entiers algébriques sur A) et alors il existe $\tilde{q}$, idéal premier de $\tilde{A}$ tel que $\tilde{B} = \tilde{A}_{\tilde{q}}$; or, de $\tilde{q} \cap A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ il résulte que $\tilde{q} = \tilde{\mathfrak{p}}$, c.a.d. $\tilde{B} = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$.

LEMME 4. Soit K , muni de w , et $\tilde{K}$ un surcorps algébrique de K tel que w admette un prolongement unique $\tilde{w}$ à l'extension normale de K engendrée par $\tilde{K}$. Alors on a: $\tilde{w}(x) = \frac{1}{[\tilde{K}_1:K]} \cdot w(N_{\tilde{K}_1|K}(x))$ pour tout $x \in K$, où $\tilde{K}_1$ désigne un sous-corps quelconque de $\tilde{K}$ contenant x et tel que $[\tilde{K}_1:K]$ soit fini; autrement dit, si $a_m \in K$ est le terme constant du polynôme minimal de x sur K , ayant degré m , alors $\tilde{w}(x) = \frac{1}{m} w(a_m)$; en particulier, x est entier sur l'anneau A de la valuation w si et seulement si $N_{\tilde{K}|K}(x) \in A$.

LEMME 5. Soit K , muni de w , un corps valué maximal. Si $\tilde{K}$ est un surcorps algébrique fini de K , $[\tilde{K}:K] = n$, et si $\tilde{w}$ est l'unique prolongement de w à $\tilde{K}$, alors $\tilde{K}$ est un corps maximal et on a (avec les notations du lemme 2): $\frac{e_0}{n} = \frac{e}{f} = \frac{e'}{f'} = \frac{1}{f^0}$ donc $e_0 f^0 = n$.

En effet, si $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ sont des idéaux premiers de l'anneau A de la valuation w , $(0) \subseteq \mathfrak{p} < \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}^0$, d'après le lemme 6 de [2], le corps $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, muni de la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$, ayant groupe de valeurs Δ/Δ' , est un corps maximal. D'après le lemme 3 la valuation $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}'}}$ est le prolongement unique de $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ au corps $\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$. Par un résultat connu (SCHILLING [6]), $\tilde{\mathcal{K}}$, muni de $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}'}}$, est un corps maximal et on a $[\tilde{\mathcal{K}}':\tilde{\mathcal{K}}'] \cdot (\tilde{\Delta}/\tilde{\Delta}':\Delta/\Delta') = [\tilde{\mathcal{K}}:\mathcal{K}]$, c.a.d. $f' \cdot \frac{e}{e'} = f$, car $\mathcal{K}', \tilde{\mathcal{K}}'$, sont respectivement les corps des restes de $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$, $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}'}}$.

Pour traiter le cas analogue d'un corps valué complet, nous allons faire usage du résultat suivant, essentiellement contenu dans le livre de SCHILLING [6]:

Soit K un corps muni de la valuation w et $\tilde{K}$ un surcorps algébrique fini de K , muni de la valuation $\tilde{w}$ prolongeant w . Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de l'anneau A de w , soit $\tilde{\mathfrak{p}}$ le correspondant idéal premier de l'anneau $\tilde{A}$ de $\tilde{w}$, soient $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$. Soit $\{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_m\}$ un ensemble d'éléments de $\tilde{\mathcal{K}}$, linéairement indépendants sur $\tilde{\mathcal{K}}$, et pour chaque $i=1, \dots, m$, soit l'élément $\tilde{b}_i \in \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ tel que $\tilde{\beta}_i$ soit sa classe résidue modulo $\tilde{\mathfrak{p}}$. Si $\tilde{a} = \sum_{i=1}^m a_i \tilde{b}_i \in \tilde{K}$, avec $a_i \in K$ non tous nuls, alors $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}}(\tilde{a}) = \min_{1 \leq i \leq m} \{w_{\mathfrak{p}}(a_i)\}$. En particulier, $\{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m\}$ sont linéairement indépendants sur K .

Le lemme qui suit sera utilisé dans la démonstration du théorème 1 pour le cas d'une valuation w dont l'anneau de valuation possède idéal premier limite.

LEMME 6. Soit K un corps muni de la valuation w et $\tilde{K}$ un surcorps algébrique fini de K , muni de la valuation $\tilde{w}$ prolongeant w ; supposons que (0) soit un idéal premier limite de l'anneau A de w : $(0) = \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}} \mathfrak{p}_{\tau}$ avec $\mathfrak{p}_{\tau} \neq (0)$, $\mathfrak{p}_{\tau}$ étant un idéal premier de A (pour tout $\tau \in \mathbb{T}$). Alors $(\tilde{I}:\tilde{I}) = \sup_{\tau \in \mathbb{T}} \{(\tilde{A}_{\tau}:\mathcal{A}_{\tau})\}$ et si K est «complet» on a aussi $[\tilde{K}:K] = \sup_{\tau \in \mathbb{T}} \{[\tilde{\mathcal{K}}_{\tau}:\mathcal{K}_{\tau}]\}$ (où $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau}$ est l'idéal premier de $\tilde{A}$, correspondant à $\mathfrak{p}_{\tau}$, $\tilde{\mathcal{K}}_{\tau} = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau}}/\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau}$, $\mathcal{K}_{\tau} = A_{\mathfrak{p}_{\tau}}/\mathfrak{p}_{\tau}$, $\tilde{A}_{\tau}$, $\mathcal{A}_{\tau}$, sont les sous-groupes isolés de $\tilde{I}$, I qui correspondent resp. aux idéaux premiers $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau}$, $\mathfrak{p}_{\tau}$).

En effet, comme $\mathcal{A}_{\tau} = \tilde{A}_{\tau} \cap I$ alors (à moins d'isomorphisme) $\tilde{I}/I \supseteq \tilde{A}_{\tau}/\mathcal{A}_{\tau}$ pour tout indice $\tau \in \mathbb{T}$, donc $\tilde{I}/I \supseteq \bigcup_{\tau \in \mathbb{T}} \tilde{A}_{\tau}/\mathcal{A}_{\tau}$; d'autre part, de $\tilde{I} = \bigcup_{\tau \in \mathbb{T}} \tilde{A}_{\tau}$ il résulte aussitôt qu'on a l'égalité $\tilde{I}/I = \bigcup_{\tau \in \mathbb{T}} \tilde{A}_{\tau}/\mathcal{A}_{\tau}$. Enfin, comme $\tilde{I}/I$ est un groupe fini et $\tilde{A}_{\tau}/\mathcal{A}_{\tau} > \tilde{A}_{\tau'}/\mathcal{A}_{\tau'}$ lorsque $\tilde{A}_{\tau} > \tilde{A}_{\tau'}$ alors il existe nécessairement un indice τ tel que $\tilde{I}/I = \tilde{A}_{\tau}/\mathcal{A}_{\tau}$; en particulier, $(\tilde{I}:\tilde{I}) = \sup_{\tau \in \mathbb{T}} \{(\tilde{A}_{\tau}:\mathcal{A}_{\tau})\}$.

Montrons maintenant que si K est complet alors $[\tilde{K}:K] = \sup_{\tau \in \mathbb{T}} \{[\tilde{\mathcal{K}}_{\tau}:\mathcal{K}_{\tau}]\}$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit $\tau_1 \in \mathbb{T}$ tel que $[\tilde{\mathcal{K}}_{\tau_1}:\mathcal{K}_{\tau_1}] = \sup_{\tau \in \mathbb{T}} \{[\tilde{\mathcal{K}}_{\tau}:\mathcal{K}_{\tau}]\} = m < [\tilde{K}:K]$; donc si $\mathfrak{p}_{\tau} < \mathfrak{p}_{\tau_1}$ alors on a aussi $[\tilde{\mathcal{K}}_{\tau}:\mathcal{K}_{\tau}] = m$.

Soit une base $\{\tilde{\beta}_{\tau_1 1}, \dots, \tilde{\beta}_{\tau_1 m}\}$ de $\tilde{\mathcal{K}}_{\tau_1}$ sur $\mathcal{K}_{\tau_1}$; on peut évidemment supposer que $\tilde{\beta}_{\tau_1 i} \in \tilde{A}/\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}$. Pour chaque $i=1, \dots, m$ soit $\tilde{b}_i \in \tilde{A}$, dont la classe modulo $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau_1}$ soit $\tilde{\beta}_{\tau_1 i}$. Alors les éléments $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m$ sont linéairement indépendants sur K .

Comme $[\tilde{K}:K] > m$ il existe alors un élément $\tilde{c} \in \tilde{A}$ qui est linéairement indépendant des éléments $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m$. Pour chaque $\tau \in \mathbb{T}$, $\mathfrak{p}_{\tau} < \mathfrak{p}_{\tau_1}$, soit $\tilde{\gamma}_{\tau}$ la

classe de $\tilde{c}$ modulo $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$; donc $\tilde{\gamma}_\tau = \sum_{i=1}^m \gamma_{\tau i} \tilde{\beta}_{\tau i}$ (où chaque $\tilde{\beta}_{\tau i}$ est la classe de $\tilde{b}_i$ modulo $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ et chaque $\gamma_{\tau i} \in \mathcal{K}_\tau$), en remarquant que $\{\tilde{\beta}_{\tau 1}, \dots, \tilde{\beta}_{\tau m}\}$ sont linéairement indépendants sur $\tilde{\mathcal{K}}_\tau$, car la classe de $\tilde{\beta}_{\tau i}$ modulo $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau/\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ est $\tilde{\beta}_{\tau i}$ ($i=1, \dots, m$).

Choisissons pour chaque $\mathfrak{p}_\tau$ et chaque $i=1, \dots, m$, un élément $c_{\tau i} \in A$ tel que $\gamma_{\tau i}$ soit la classe de $c_{\tau i}$ mod. $\mathfrak{p}_\tau$; alors $c_{\tau i} = c_{\tau i} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_{\tau'} \subset \mathfrak{p}_\tau$ ($i=1, \dots, m$), c.a.d. pour chaque i , on obtient un système compatible de congruences. Or, K étant complet, il existe des éléments $c_i \in A$ ($i=1, \dots, m$) tels que $c_i = c_{\tau i} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ pour tout $\mathfrak{p}_\tau \subset \mathfrak{p}_{\tau_1}$. Alors $\tilde{c} - \sum_{i=1}^m c_i \tilde{b}_i \in \tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ pour tout $\tau \in T$, car l'image de cet élément est 0 selon l'homomorphisme $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}/\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$. Enfin, de $(0) = \bigcap \mathfrak{p}_\tau$ il résulte que $\tilde{c} = \sum_{i=1}^m c_i \tilde{b}_i$, ce qui serait une contradiction.

THÉOREME 1. *Soit K un corps complet, muni d'une valuation w . Si $\tilde{K}$ est un surcorps algébrique fini de K , si $\tilde{w}$ est l'unique valuation de $\tilde{K}$ prolongeant w , alors $\tilde{K}$, muni de $\tilde{w}$, est complet.*

DÉMONSTRATION. Nous devons vérifier les conditions (c 1), (c 2) de la définition de corps valué complet, à savoir:

c 1) si $(0) \subset \tilde{\mathfrak{p}}_1 \subset \tilde{\mathfrak{p}}_2$ sont deux idéaux premiers successifs de l'anneau $\tilde{A}$ de la valuation $\tilde{w}$, alors le corps $\tilde{\mathcal{K}}_1 = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}_1}/\tilde{\mathfrak{p}}_1$ muni de la valuation de rang 1 $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}_1, \tilde{\mathfrak{p}}_2}$ est complet (par rapport à la topologie définie par cette valuation);

c 2) si $(\tilde{\mathfrak{p}}_\tau)_{\tau \in T}$ est une famille (totalement ordonnée) décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers de $\tilde{A}$, si pour tout $\tau \in T$, $\tilde{a}_\tau \in \tilde{A}$ et $\tilde{a}_\tau \equiv \tilde{a}_{\tau'} \pmod{\tilde{\mathfrak{p}}_\tau}$ lorsque $\tilde{\mathfrak{p}}_{\tau'} \supset \tilde{\mathfrak{p}}_\tau$, alors il existe $\tilde{x} \in \tilde{A}$ tel que $\tilde{x} \equiv \tilde{a}_\tau \pmod{\tilde{\mathfrak{p}}_\tau}$ pour tout $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ (d'ailleurs cette dernière condition se trouve trivialement remplie lorsque l'anneau A ne possède aucun idéal premier limite).

Ainsi, vérifions d'abord (c 1). Soient $\tilde{\mathfrak{p}}_1, \tilde{\mathfrak{p}}_2$ deux idéaux premiers successifs de l'anneau de la valuation $\tilde{w}$, $(0) \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}_1 \subset \tilde{\mathfrak{p}}_2 \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}_0$; alors si $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ sont les correspondants idéaux premiers de l'anneau de la valuation w , la valuation $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}_1, \tilde{\mathfrak{p}}_2}$ de $\tilde{\mathcal{K}}_1 = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}_1}/\tilde{\mathfrak{p}}_1$ prolonge la valuation $w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2}$ de $\mathcal{K}_1 = A_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_1$. Or, $\mathcal{K}_1$ muni de la valuation de rang 1 $w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2}$, étant complet, on déduit en faisant usage d'un résultat connu de la théorie des valuations de rang 1 que $\tilde{\mathcal{K}}_1$, muni de la valuation de rang 1 $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}_1, \tilde{\mathfrak{p}}_2}$ est aussi complet, car $\tilde{\mathcal{K}}_1$ est une extension algébrique finie de $\mathcal{K}_1$ (lemme 2). Donc, $\tilde{K}$ muni de $\tilde{w}$, est complet.

Vérifions la condition (c 2), en supposant (pour écarter le cas trivial), que $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ soit un idéal premier limite de l'anneau $\tilde{A}$ de $\tilde{w}$, et que $\tilde{\mathfrak{p}}_0 = \bigcap_{\tau \in T} \tilde{\mathfrak{p}}_\tau$, avec $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau \neq \tilde{\mathfrak{p}}_0$, $(\tilde{\mathfrak{p}}_\tau)_{\tau \in T}$ étant une famille décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers de $\tilde{A}$. On peut supposer, sans perte de généralité, que chaque $\tilde{\mathfrak{p}}_\tau$ ne soit pas un idéal premier limite car le sous-groupe isolé limite $\tilde{\Delta}_0$ (correspondant à $\tilde{\mathfrak{p}}_0$) de $\tilde{\Gamma}$ est la réunion d'une famille strictement croissante bien ordonnée de sous-groupes isolés *non* limites $\tilde{\Delta}_\tau \neq \tilde{\Delta}_0$ (cf. par exemple [6]).

Nous pouvons aussi nous restreindre au cas où $\tilde{p}_0 = (\tilde{0})$. En effet, si $(\tilde{a}_\tau)_{\tau \in T}$ est une famille d'éléments de $\tilde{A}$, avec $\tilde{a}_\tau \equiv \tilde{a}_{\tau'} \pmod{\tilde{p}_\tau}$ lorsque $\tilde{p}_\tau \supseteq \tilde{p}_{\tau'}$, considérons la famille $(\tilde{b}_\tau)_{\tau \in T}$ d'éléments de $\tilde{A}/\tilde{p}_0$ où $\tilde{b}_\tau = \varphi_0(\tilde{a}_\tau)$, $\varphi_0: \tilde{A}_{\tilde{p}_0} \rightarrow \tilde{A}_{\tilde{p}_0}/\tilde{p}_0 = \tilde{\mathcal{K}}_0$; alors $\tilde{b}_\tau \equiv \tilde{b}_{\tau'} \pmod{\tilde{p}_\tau/\tilde{p}_0}$ lorsque $\tilde{p}_\tau/\tilde{p}_0 \supseteq \tilde{p}_{\tau'}/\tilde{p}_0$. Remarquons que le corps $\tilde{\mathcal{K}}_0 = A_{p_0}/p_0$ est complet selon la valuation $v = w_{p_0, p_0}$ (lemme 12 de [2]) et que $\tilde{\mathcal{K}}_0/\mathcal{K}_0$ est une extension algébrique finie (lemme 2). Si on montre que la condition (c 2) est valable pour l'idéal nul dans le corps $\tilde{\mathcal{K}}_0$, muni de l'unique valuation $\tilde{v}$ prolongeant v , et pour la famille $(\tilde{b}_\tau)_{\tau \in T}$, alors il existe $\tilde{y} \in \tilde{A}/\tilde{p}_0$ tel que $\tilde{y} \equiv \tilde{b}_\tau \pmod{\tilde{p}_\tau/\tilde{p}_0}$ pour tout $\tau \in T$. En remarquant que $\tilde{v} - \tilde{w}_{\tilde{p}_0, \tilde{p}_0}$, soit $\tilde{x} \in \tilde{A}$ tel que $\varphi_0(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Alors $\tilde{x} \equiv \tilde{a}_\tau \pmod{\tilde{p}_\tau}$ pour tout $\tau \in T$ et ainsi la condition (c 2) sera vérifiée pour $(\tilde{a}_\tau)_{\tau \in T}$, $\tilde{K}$, $\tilde{w}$ et l'idéal $\tilde{p}_0$.

Ainsi, supposons que l'idéal nul soit un idéal premier limite de l'anneau $\tilde{A}$ de $\tilde{w}$ et que $(\tilde{0}) = \bigcap_{\tau \in T} \tilde{p}_\tau$, avec $\tilde{p}_\tau \neq (\tilde{0})$. Notons p_τ l'idéal premier de A correspondant à $\tilde{p}_\tau$, soient $\tilde{\mathcal{K}}_\tau = \tilde{A}_{\tilde{p}_\tau}/\tilde{p}_\tau$, $\mathcal{K}_\tau = A_{p_\tau}/p_\tau$. Or, par le lemme 6, on a $[\tilde{K}:K] = \sup_{\tau \in T} \{[\tilde{\mathcal{K}}_\tau:\mathcal{K}_\tau]\}$, car K est complet. Comme ces degrés sont des entiers, il existe nécessairement un idéal premier non nul $\tilde{p}_{\tau_1}$ tel que $[\tilde{K}:K] = [\tilde{\mathcal{K}}_{\tau_1}:\mathcal{K}_{\tau_1}]$. Ceci étant, il suffit de trouver $\tilde{x} \in \tilde{A}$, $\tilde{x} \equiv \tilde{a}_\tau \pmod{\tilde{p}_\tau}$ pour tout $p_\tau \subseteq p_{\tau_1}$, car alors si $\tilde{p}_{\tau_1} \subset \tilde{p}_{\tau'}$, on aura $\tilde{a}_\tau \equiv \tilde{a}_{\tau'} \pmod{\tilde{p}_{\tau'}}$ donc $\tilde{x} \equiv \tilde{a}_{\tau'} \pmod{\tilde{p}_{\tau'}}$.

Prenons une base $\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m\}$ du $\mathcal{K}_{\tau_1}$ -espace vectoriel $\tilde{\mathcal{K}}_{\tau_1}$ et pour chaque $i = 1, \dots, m$, soit $\tilde{c}_i \in \tilde{A}_{\tilde{p}_{\tau_1}} \subset \tilde{K}$ tel que sa classe résiduelle mod. $\tilde{p}_{\tau_1}$ soit $\tilde{a}_i$. Par une remarque antérieure, $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m$ sont linéairement indépendants sur K , donc ils forment une base de $\tilde{K}$ sur K .

Ceci étant, exprimons chaque élément $\tilde{a}_\tau$ en termes de la base $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m\}$:
$$\tilde{a}_\tau = \sum_{i=1}^m a_{\tau i} \tilde{c}_i \text{ avec } a_{\tau i} \in K \text{ (} i=1, \dots, m \text{) et nécessairement chaque } a_{\tau i} \in A_{p_{\tau_1}},$$
 en vertu de la remarque déjà faite.

Donc $\tilde{a}_\tau - \tilde{a}_{\tau'} = \sum_{i=1}^m (a_{\tau i} - a_{\tau' i}) \tilde{c}_i$ et $\tilde{w}_{\tilde{p}_{\tau_1}}(\tilde{a}_\tau - \tilde{a}_{\tau'}) = \min_{1 \leq i \leq m} \{w_{p_{\tau_1}}(a_{\tau i} - a_{\tau' i})\}$; de $\tilde{a}_\tau \equiv \tilde{a}_{\tau'} \pmod{\tilde{p}_\tau}$ lorsque $\tilde{p}_\tau \supset \tilde{p}_{\tau'}$, il résulte que $\tilde{w}_{\tilde{p}_{\tau_1}}(\tilde{a}_\tau - \tilde{a}_{\tau'}) \notin \tilde{\Delta}_\tau$ (sous-groupe isolé de $\tilde{\Gamma}$ associé à $\tilde{p}_\tau$) et ainsi $w_{p_{\tau_1}}(a_{\tau i} - a_{\tau' i}) \notin \tilde{\Delta}_\tau \cap \Gamma = \Delta_\tau$, donc $a_{\tau i} \equiv a_{\tau' i} \pmod{p_\tau}$ lorsque $p_\tau \supset p_{\tau'}$ ($i=1, \dots, m$).

Or, comme K , muni de w , est complet, il en est de même pour la valuation $w_{p_{\tau_1}}$, donc chacun des systèmes compatibles de congruences $a_{\tau i} \equiv a_{\tau' i} \pmod{p_\tau}$ lorsque $p_\tau \supset p_{\tau'}$ ($i=1, \dots, m$), $a_{\tau i} \in A_{p_{\tau_1}}$, possède solution $x_i \in A_{p_{\tau_1}}$: $x_i \equiv a_{\tau i} \pmod{p_\tau}$ pour tout $\tau \in T$ ($i=1, \dots, m$). Soit $\tilde{x} = \sum_{i=1}^m x_i \tilde{c}_i \in \tilde{A}_{\tilde{p}_{\tau_1}}$; alors $\tilde{x} - \tilde{a}_\tau = \sum_{i=1}^m (x_i - a_{\tau i}) \tilde{c}_i \in \tilde{p}_\tau$ (pour tout τ), car $\tilde{w}_{p_{\tau_1}}(\tilde{x} - \tilde{a}_\tau) = \min_{1 \leq i \leq m} \{w_{p_{\tau_1}}(x_i - a_{\tau i})\}$ et de $x_i - a_{\tau i} \in p_\tau$ vient $w_{p_{\tau_1}}(x_i - a_{\tau i}) \notin \Delta_\tau$ ($i=1, \dots, m$) donc $\tilde{w}_{p_{\tau_1}}(\tilde{x} - \tilde{a}_\tau) \notin \tilde{\Delta}_\tau$ c.a.d. $\tilde{x} \equiv \tilde{a}_\tau \pmod{\tilde{p}_\tau}$ pour tout $\tau \in T$.

3.

Soit K un corps muni de la valuation w et $\tilde{K}$ un surcorps algébrique fini de K . Il a été rappelé au n° 1 que w admet un nombre fini de prolongements $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ à $\tilde{K}$ et que si $\tilde{K}|K$ est une extension normale alors les prolongements de w sont des valuations conjuguées, c.a.d., pour tout indice j ($1 \leq j \leq r$) il existe un K -automorphisme σ_j de $\tilde{K}$ tel que $\tilde{w}_j = \tilde{w}_1 \circ \sigma_j$. Nous allons déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur deux K -automorphismes de $\tilde{K}$ pour que les correspondantes valuations coïncident.

Cette question a déjà été résolue (HASSE [7]) pour le cas où w possède rang 1. Nous indiquerons la solution lorsque w possède *rang fini*, en raisonnant par induction sur le rang de w ; en outre, pour écarter des difficultés techniques dans l'induction (et dont la nature sera expliquée ci-dessous) nous allons nous restreindre au cas d'une valuation *discrète* w .

Il est alors convenable de utiliser la méthode de HASSE pour décrire les différents prolongements de la valuation w au surcorps $\tilde{K}$. Nous pourrions nous ramener au cas où $\tilde{K}|K$ est une extension normale, toutefois, ayant en vue une application ultérieure, nous ne ferons pas cette hypothèse; le cas d'une extension algébrique arbitraire n'est pas sensiblement plus difficile que celui des extensions normales.

Soit donc K un corps muni de la valuation discrète de rang fini w , $\tilde{K}|K$ une extension algébrique de degré n , soit $\hat{K}$ une extension immédiate de K qui soit un corps valué complet (par exemple, une extension immédiate maximale de K), et $\hat{w}$ le prolongement de w à $\hat{K}$. Soit K^* une clôture algébrique de $\hat{K}$, w^* le prolongement unique de $\hat{w}$ à K^* ; notons K_0^* la fermeture algébrique de K dans K^* , donc K_0^* est aussi algébriquement clos. Soit $R = \{\varrho_1, \dots, \varrho_m\}$ l'ensemble des K -isomorphismes distincts de $\tilde{K}$ dans K^* , donc $\varrho_i(\tilde{K}) = K_i^* \subseteq K_0^*$ ($i=1, \dots, m$) (rappelons qu'on a $m \leq n$ et $m=n$ exactement lorsque $\tilde{K}|K$ est séparable); enfin, notons $\hat{K}_i = K_i^* \hat{K}$ le corps composé de K_i^* et $\hat{K}$, donc pour tout indice $i=1, \dots, m$, $\hat{K}_i|\hat{K}$ est une extension algébrique ayant degré $[\hat{K}_i:\hat{K}] = n_i \leq n = [\tilde{K}:K]$. Toute valuation de $\hat{K}$ qui prolonge w est du type $w^* \circ \varrho_i$ ($i=1, \dots, m$); notons $\tilde{A}_i$ l'anneau de la valuation $w^* \circ \varrho_i$. Dans le cas particulier où $\tilde{K}|K$ est une extension normale, on peut déjà supposer que $\tilde{K} \subseteq K_0^*$, donc $\tilde{K} = K_1^* = K_2^* = \dots = K_m^*$ et alors $G = \{\varrho_i | i=1, \dots, m\}$ est l'ensemble des K -automorphismes de $\tilde{K}$; dans ce cas, si $\tilde{w}$ est la restriction à $\tilde{K}$ de la valuation w^* , alors toute valuation de $\tilde{K}$ qui prolonge w est du type $\tilde{w} \circ \sigma_i$ ($i=1, \dots, m$) où $\sigma_i = \varrho_i \circ \varrho_1^{-1}$ (resp. $\sigma_i = \varrho_i$ si on a fait l'identification).

LEMME 7. (HASSE [7]) Soit w une valuation de rang 1 (non nécessairement discrète) du corps K , soit $\hat{K}$ le «complété» de K , muni de $\hat{w}$ (prolongement unique de w à $\hat{K}$); avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a $w^* \circ \varrho_i = w^* \circ \varrho_j$ si et seulement si $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$ est la restriction à K_i^* d'un $\tilde{K}$ -isomorphisme de $\tilde{K}_i$ sur $\tilde{K}_j$.

On dit alors, suivant HASSE, que ϱ_i, ϱ_j sont équivalents selon la valuation w et on écrit $\varrho_i \equiv \varrho_j (w, \tilde{K} | K)$.

Dans le cas particulier où $\tilde{K} | K$ est une extension galoisienne alors on a le corollaire:

COROLLAIRE. Avec les hypothèses et notations ci-dessus, $w^* \circ \sigma_i = w^* \circ \sigma_j$ si et seulement si $\sigma_j \circ \sigma_i^{-1}$ est un $(\tilde{K} \cap \tilde{K})$ -automorphisme de $\tilde{K}$.

Le corollaire se déduit aussitôt, utilisant un résultat bien connu de la théorie des corps commutatifs (BOURBAKI [8], ch. V, 10, th. 1).

Pour généraliser ce résultat de HASSE au cas où w est une valuation de rang fini, discrète, faisons quelques remarques.

a) Si $\tilde{w}_i = w^* \circ \varrho_i$ est une valuation de $\tilde{K}$ prolongeant w , si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A , si $\mathfrak{p}^*, \tilde{\mathfrak{p}}_i$ sont resp. les correspondants idéaux premiers de A^* (anneau de w^* de K^*) et de $\tilde{A}_i$ (anneau de $\tilde{w}_i^*$ de K^*), alors $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = w_{\mathfrak{p}^*}^* \circ \varrho_i$.

b) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A , si $\hat{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}^*$, sont resp. les correspondants idéaux premiers de $\hat{A}$ (anneau de la valuation $\hat{w}$ de $\hat{K}$) et de A^* , alors $\mathcal{K}^* = A_{\mathfrak{p}^*}^* / \mathfrak{p}^*$ (corps des restes de K^* selon $w_{\mathfrak{p}^*}^*$) est une clôture algébrique de $\hat{\mathcal{K}} = \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}} / \hat{\mathfrak{p}}$ (corps des restes de $\hat{K}$ selon $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$); $\hat{\mathcal{K}}$ est maximal selon $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ et $w_{\mathfrak{p}^*}^*, \mathfrak{p}^*$ est l'unique prolongement de $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ à $\mathcal{K}^*$.

c) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ l'idéal premier correspondant de l'anneau $\tilde{A}_i$ de la valuation $\tilde{w}_i = w^* \circ \varrho_i$ de $\tilde{K}$ (où $1 \leq i \leq m$), notons $\tilde{\mathcal{K}}_i = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} / \tilde{\mathfrak{p}}_i$ le corps des restes de $\tilde{K}$ selon $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = w_{\mathfrak{p}^*}^* \circ \varrho_i$, et de même, notons $\mathcal{K}_i^*$ le corps des restes de $K_i^* = \varrho_i(\tilde{K})$ par la valuation induite par $w_{\mathfrak{p}^*}^*$; enfin, notons $\tilde{\varphi}_i: (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_i$ et $\varphi_i^*: K_i^* \cap A_{\mathfrak{p}^*}^* \rightarrow \mathcal{K}_i^*$ les homomorphismes canoniques de passage aux corps des restes, et soit $\chi_i = \chi(\varrho_i, \mathfrak{p})$ l'application définie par $\chi_i \circ \tilde{\varphi}_i = \varphi_i^* \circ \varrho_i$. Alors, pour tout $i = 1, \dots, m$, χ_i est un $\mathcal{K}$ -isomorphisme de $\tilde{\mathcal{K}}_i$ sur $\mathcal{K}_i^*$ (car $\varrho_i(\tilde{\mathfrak{p}}_i) = \mathfrak{p}^* \cap K_i^*$). En particulier, si on prend $\mathfrak{p} = (0)$ alors $\chi(\varrho_i, (0)) = \varrho_i$ ($i = 1, \dots, m$).

d) Si $\tilde{\mathfrak{p}}$ est un idéal premier commun aux anneaux de valuation $\tilde{A}_i, \tilde{A}_j$, alors $\tilde{\mathcal{K}}_i = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} / \tilde{\mathfrak{p}}_i = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j} / \tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathcal{K}}_j$, donc on peut considérer l'application $\chi_j \circ \chi_i^{-1}$ de $\mathcal{K}_i^*$ sur $\mathcal{K}_j^*$, laquelle est un $\mathcal{K}$ -isomorphisme (avec $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap A$).

e) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A , alors pour tout indice $i = 1, \dots, m$, on a (avec notations évidentes): $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = w_{\mathfrak{p}^*}^* \circ \varrho_i$, où $\chi_i = \chi(\varrho_i, \mathfrak{p})$ et $\tilde{w}_i = w^* \circ \varrho_i$. En effet, cela résulte du th. 2 de [1] et des considérations ci-dessus, car si $\xi = \tilde{\varphi}_i(x)$, avec $x \in (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$, $x \notin \tilde{\mathfrak{p}}_i$, alors $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}(\xi) = \tilde{w}_i(x) = w^*(\varrho_i(x)) = w_{\mathfrak{p}^*}^*(\varphi_i^*(\varrho_i(x))) = w_{\mathfrak{p}^*}^*(\chi_i(\tilde{\varphi}_i(x))) = w_{\mathfrak{p}^*}^*(\chi_i(\xi))$.

f) Si $\tilde{K}$ est une extension immédiate maximale de K selon w et $\hat{w}$ le prolongement unique de w à $\hat{K}$, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A de w et $\hat{\mathfrak{p}}$ est le correspondant idéal premier de l'anneau $\hat{A}$ de $\hat{w}$, il existe un corps $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$ tel que $K \subseteq \hat{K}_{\mathfrak{p}} \subseteq \hat{K}$ et que, muni de la valuation induite par $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$ soit une extension immédiate maximale de K , selon $w_{\mathfrak{p}}$ (cf. lemme 5 de [2]).

Nous allons maintenant définir l'équivalence $\varrho_i \equiv \varrho_j (w, \tilde{K} | K)$.

Soit $(0) = \mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}_1 < \dots < \mathfrak{p}_{l-1} < \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}^0$ la suite strictement croissante des idéaux premiers de A (donc l est égal au rang de w). Pour tout $h = 0, 1, \dots, l-1$, soit $\mathcal{K}_h$ le corps des restes de K selon la valuation $w_{\mathfrak{p}_h}$ (si $h=0$ alors $\mathcal{K}_h = K$). Soit $\hat{K}$ une extension immédiate maximale de K selon la valuation w ; par le lemme 5 de [2], pour toute valuation $w_{\mathfrak{p}_h}$, moins fine que w , il existe une extension immédiate maximale $\hat{K}_{\mathfrak{p}_h}$ de K selon $w_{\mathfrak{p}_h}$, de façon que $K \subseteq \hat{K}_{\mathfrak{p}_1} \subseteq \hat{K}_{\mathfrak{p}_2} \subseteq \dots \subseteq \hat{K}_{\mathfrak{p}_l} = \hat{K}$. Pour tout h soit $\hat{\mathcal{K}}_h$ l'extension immédiate maximale de $\mathcal{K}_h$ (relativement à $w_{\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}^0}$) obtenue comme corps des restes de $\hat{K}$ selon la valuation $\hat{w}_{\mathfrak{p}_h}$; de même, soit $(\hat{\mathcal{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ l'extension immédiate maximale de $\hat{\mathcal{K}}_h$ selon la valuation $w_{\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_{h+1}}$, de façon que $(\hat{\mathcal{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ soit contenue dans $\hat{\mathcal{K}}_{h+1}$ (lemme 5 de [2]); alors $(\hat{\mathcal{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ est le corps des restes de $\hat{K}_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ selon la valuation $\hat{w}_{\mathfrak{p}_h}$. Pour $h=0, 1, \dots, l-1$, soient $(\mathcal{K}_h)_i^*$, $(\hat{\mathcal{K}}_h)_i^*$ resp. les corps des restes de K_i^* , $\hat{K}_i^*$ par les valuations induites par $w_{\mathfrak{p}_h}^*$ (où $\mathfrak{p}_h^*$ est l'idéal premier de l'anneau de w qui correspondent à $\mathfrak{p}_h$).

DÉFINITION. Avec ces hypothèses et notations, on pose $\varrho_i \equiv \varrho_j(w, \hat{K}|K)$ lorsque, pour tout $h=0, 1, \dots, l-1$, l'application $\chi(\varrho_j, \mathfrak{p}_h) \circ \chi^{-1}(\varrho_j, \mathfrak{p}_h)$ est la restriction d'un $(\hat{\mathcal{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ -isomorphisme de $(\hat{\mathcal{K}}_h)_i^* \cdot (\hat{\mathcal{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$ sur $(\hat{\mathcal{K}}_h)_j^* \cdot (\hat{\mathcal{K}}_h)_{\mathfrak{p}_{h+1}}$; en particulier, pour $h=0$, $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$ est la restriction d'un $\hat{K}_{\mathfrak{p}_i}$ -isomorphisme de $K_i^* \cdot \hat{K}_{\mathfrak{p}_i}$ sur $K_j^* \cdot \hat{K}_{\mathfrak{p}_i}$.

Dans le cas particulier où la valuation w possède rang 1 et est discrète, cette définition coïncide avec celle indiquée au lemme 7, car alors le complété de w est une extension immédiate maximale.

THÉORÈME 2. Avec les hypothèses et notations ci-dessus, si w est une valuation de rang fini, discrète, alors $w^* \circ \varrho_j = w^* \circ \varrho_i$ si et seulement si $\varrho_i \equiv \varrho_j(w, \hat{K}|K)$.

DÉMONSTRATION. Le théorème se réduit au lemme 7 lorsque w possède rang 1, car w étant discrète, le corps complété est une extension immédiate maximale.

Supposons donc que w possède rang supérieur à 1 et que le théorème soit déjà démontré pour les valuations ayant rang inférieur à celui de w .

Soit $\varrho_i \equiv \varrho_j(w, \hat{K}|K)$. Nous allons d'abord montrer que $\varrho_i \equiv \varrho_j(w_{\mathfrak{p}_1}, \hat{K}|K)$, donc $w_{\mathfrak{p}_1}$ étant de rang 1, il résulte par le lemme 7 que $(\tilde{w}_i)_{\mathfrak{p}_{1i}} = (\tilde{w}_j)_{\mathfrak{p}_{1j}}$ et alors $\tilde{\mathfrak{p}}_{1i} = \tilde{\mathfrak{p}}_{1j}$, donc $\hat{\mathcal{K}}_{1i} = (\hat{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}}/\tilde{\mathfrak{p}}_{1i} = (\hat{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}}/\tilde{\mathfrak{p}}_{1j} = \hat{\mathcal{K}}_{1j}$; par simplicité, notons $\hat{\mathcal{K}}_1$ ce corps. Ensuite, nous montrerons que si $\chi_{1i} = \chi(\varrho_i, \mathfrak{p}_1)$, $\chi_{1j} = \chi(\varrho_j, \mathfrak{p}_1)$ alors $\chi_{1i} \equiv \chi_{1j}(w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^0}, \hat{\mathcal{K}}_1|\mathcal{K}_1)$; par induction, car le rang de $w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^0}$ est strictement inférieur à celui de w , il résulte que $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}, \tilde{\mathfrak{p}}_i^0} = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}, \tilde{\mathfrak{p}}_j^0}$. Enfin, par le théorème des valuations composées (th. 3 de [1]) on conclut que $\tilde{w}_i = \tilde{w}_j$.

Ainsi, montrons que $\varrho_i \equiv \varrho_j(w_{\mathfrak{p}_1}, \hat{K}|K)$. En effet, si on prend l'extension immédiate maximale $\hat{K}_{\mathfrak{p}_1}$ de K selon $w_{\mathfrak{p}_1}$, contenue dans l'extension immédiate maximale donnée $\hat{K}$ de K selon w (cf. lemme 5 de [2]), alors $\varrho_i \equiv \varrho_j(w_{\mathfrak{p}_1}, \hat{K}|K)$ résulte comme cas particulier de $\varrho_i \equiv \varrho_j(w, \hat{K}|K)$, en rappelant que le seul

idéal premier non nul de l'anneau de $w_{\mathfrak{p}_1}$ est $\mathfrak{p}_1$, et en appliquant la condition déduite de $\varrho_i \equiv \varrho_j (w, \tilde{K} | K)$ pour $h=0$.

Montrons que $\chi_{1i} = \chi_{1j} (w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^0}, \hat{\mathcal{K}}_1 | \mathcal{K}_1)$. Notons $q_h = \mathfrak{p}_{h+1} / \mathfrak{p}_1$, donc les idéaux premiers de l'anneau de $w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^0}$ sont $(0) < q_1 < q_2 < \dots < q_{l-1} = q^0$. Pour tout $h=0, 1, \dots, l-2$, le corps des restes de $\mathcal{K}_1$ selon la valuation $(w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^0})_{q_h} = w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{h+1}}$ (corollaire au th. 2 de [I]) est égal au corps des restes de K selon la valuation $w_{\mathfrak{p}_{h+1}}$, c.a.d. à $\mathcal{K}_{h-1}$ (th. 2 de [I]). Alors $\hat{\mathcal{K}}_{h+1}$, qui est l'extension immédiate maximale de $\mathcal{K}_h$ qui a été définie comme corps des restes de $\hat{K}$ selon la valuation $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}_{h+1}}$, est aussi le corps des restes de $\hat{\mathcal{K}}_1$ selon la valuation $(\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}_1, \hat{\mathfrak{p}}^0})_{q_h} = \hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}_1, \hat{\mathfrak{p}}_{h+1}}$. De même, $(\hat{\mathcal{K}}_{h+1})_{\mathfrak{p}_{h+2}}$, qui est l'extension immédiate maximale de $\mathcal{K}_{h+1}$ selon la valuation $w_{\mathfrak{p}_{h+1}, \mathfrak{p}_{h+2}}$ et contenue dans $\hat{\mathcal{K}}_{h-1}$, est aussi l'extension immédiate maximale de $\mathcal{K}_{h-1}$ selon la valuation $(w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^0})_{q_h, q_{h+1}} = w_{\mathfrak{p}_{h+1}, \mathfrak{p}_{h+2}}$ (cor. au th. 2 de [I]). Enfin, puisque les corps des restes de $\mathcal{K}_1^* = \chi_{1i}(\mathcal{K}_1)$ et $\mathcal{K}_j^* = \chi_{1j}(\mathcal{K}_1)$ par la valuation induite par $(w_{\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}^{**}}^*)_{q_h} = w_{\mathfrak{p}_h^*, \mathfrak{p}_{h+1}^*}^*$ sont resp. égaux aux corps restes de $K_i^* = \varrho_i(\tilde{K})$ et $K_j^* = \varrho_j(\tilde{K})$ par la valuation induite par $w_{\mathfrak{p}_{h+1}^*}^*$ (th. 2 de [2] et remarques (c), (e)), ils coïncident donc avec $(\mathcal{K}_{h-1})_i^*$, $(\mathcal{K}_{h+1})_j^*$. Ceci étant, il résulte comme cas particulier de $\varrho_i \equiv \varrho_j (w, \tilde{K} | K)$, en appliquant la définition pour $h=1, 2, \dots, l-1$, que $\chi_{1i} \equiv \chi_{1j} (w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^0}, \hat{\mathcal{K}}_1 | \mathcal{K}_1)$. Cela permet de conclure que $\tilde{w}_i = \tilde{w}_j$.

Réciproquement, supposons que $\tilde{w}_i = \tilde{w}_j$ et soit $(0) = \mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}_1 < \dots < \mathfrak{p}_{l-1} < \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}^0$ la suite strictement croissante des idéaux premiers de l'anneau de la valuation w . Alors $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}} = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}}$ (où $\tilde{\mathfrak{p}}_{1i} = \tilde{\mathfrak{p}}_{1j}$ est l'idéal premier qui correspond à $\mathfrak{p}_1$); puisque $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}} = w_{\mathfrak{p}_1^*}^* \circ \varrho_i$, $(\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}} = w_{\mathfrak{p}_1^*}^* \circ \varrho_j$ et que ces valuations sont discrètes de rang 1, il résulte par le lemme 7 que $\varrho_i \equiv \varrho_j (w_{\mathfrak{p}_1}, \tilde{K} | K)$. De même, $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}, \tilde{\mathfrak{p}}_i^0} = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}, \tilde{\mathfrak{p}}_j^0}$; puisque $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}, \tilde{\mathfrak{p}}_i^0} = w_{\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}^{**}}^* \circ \chi_{1i}$, $(\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}, \tilde{\mathfrak{p}}_j^0} = w_{\mathfrak{p}_1^*, \mathfrak{p}^{**}}^* \circ \chi_{1j}$ (en vertu de la remarque (e)), on conclut par induction, car $w_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^0}$ est discrète de rang inférieur à celui de w , que $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1i}, \tilde{\mathfrak{p}}_i^0} = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_{1j}, \tilde{\mathfrak{p}}_j^0}$. Enfin, par le théorème des valuations composées, on déduit que $\tilde{w}_i = \tilde{w}_j$.

REMARQUE. Dans le cas où w est une valuation de rang fini, non nécessairement discrète, la définition indiquée ci-dessus a encore un sens et le th. 1 continue vrai.

Rappelons ces résultats (RIBENBOIM [9]).

Soit K un corps, muni de la valuation w ayant rang bien ordonné, soit $\hat{K}$, muni de $\hat{w}$, une extension immédiate maximale de K . Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de l'anneau A de w qui précède immédiatement l'idéal maximal $\mathfrak{p}^0$, soit $\hat{\mathfrak{p}}$ le correspondant idéal premier de l'anneau $\hat{A}$ de $\hat{w}$. Soient $\hat{\mathcal{K}} = A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}$, $\tilde{\mathcal{K}} = \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}} / \hat{\mathfrak{p}}$, resp. les corps des restes de K selon $w_{\mathfrak{p}}$ et de $\hat{K}$ selon $\hat{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$; puisque $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$ est une valuation de rang 1 et que $\hat{\mathcal{K}}$ est une extension immédiate maximale de $\mathcal{K}$, muni de $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$, alors il existe un sous-corps $\tilde{\mathcal{K}}$ de $\hat{\mathcal{K}}$ isomorphe au complété (topologique) de $\mathcal{K}$ selon $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$. Soit $B = \varphi^{-1}(\tilde{\mathcal{K}})$ (où $\varphi: \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ est l'application canonique de passage au quotient) et $\tilde{K}$ le corps des fractions de B , donc $K \subseteq \tilde{K} \subseteq \hat{K}$.

On démontre que $\tilde{K}$, muni de la valuation $\tilde{w}$, induite par $\hat{w}$, est un corps valué complet. Ce corps complet, univoquement défini dans l'extension immédiate maximale donnée K , s'appelle le *complété distingué* de K dans $\hat{K}$.

On démontre que l'anneau $\tilde{A}$ de la valuation $\tilde{w}$ de $\tilde{K}$ est égal à l'ensemble des éléments de $\hat{K}$ qui sont pseudo-limites d'au moins une suite pseudo-convergente distinguée d'éléments de K (cf. définition et th. 3 de [2]).

Il résulte que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A de w , $(0) \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^0$, si $\hat{\mathfrak{p}}$ est le correspondant idéal premier de l'anneau $\hat{A}$ de $\hat{w}$, alors le corps complété distingué de $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ muni de $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$ dans l'extension immédiate maximale $\hat{\mathcal{K}} = \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}}/\hat{\mathfrak{p}}$, est égal au corps des restes de $\tilde{K}$ selon la valuation induite par $\tilde{w}_{\hat{\mathfrak{p}}}$.

Enfin, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A de w , $(0) \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^0$, si $\hat{K}$ est une extension immédiate maximale de K muni de w , si $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$ est l'extension immédiate maximale de K muni de $w_{\mathfrak{p}}$ et tel que $K \subseteq \hat{K}_{\mathfrak{p}} \subseteq \hat{K}$, si $\tilde{K}$, $\tilde{K}_{\mathfrak{p}}$ désignent resp. les corps complétés distingués de K selon w (dans $\hat{K}$) et selon $w_{\mathfrak{p}}$ (dans $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$), alors $K \subseteq \tilde{K}_{\mathfrak{p}} \subseteq \tilde{K}$.

Nous rechercherons maintenant les différents prolongements de la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ de K et la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ de $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ sont des idéaux premiers de l'anneau A de w tels que $(0) \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}^0$.

LEMME 8. Soit w une valuation du corps K admettant les prolongements distincts $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ au corps $\tilde{K}$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de l'anneau A de w et pour tout indice i soit $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ l'idéal premier unique de l'anneau $\tilde{A}_i$ de $\tilde{w}_i$ tel que $\tilde{\mathfrak{p}}_i \cap A = \mathfrak{p}$. Alors, les valuations de $\tilde{K}$ prolongeant $w_{\mathfrak{p}}$ sont exactement $(\tilde{w}_1)_{\tilde{\mathfrak{p}}_1}, (\tilde{w}_2)_{\tilde{\mathfrak{p}}_2}, \dots, (\tilde{w}_r)_{\tilde{\mathfrak{p}}_r}$, lesquelles ne sont pas nécessairement distinctes. Pour qu'on ait $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$ il faut et il suffit qu'on ait $\tilde{\mathfrak{p}}_i = \tilde{\mathfrak{p}}_j$, c.a.d. $\tilde{\mathfrak{p}}_i \subseteq \tilde{A}_j$ ou de même $\tilde{\mathfrak{p}}_j \subseteq \tilde{A}_i$.

Il est clair que les valuations $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$ prolongent la valuation $w_{\mathfrak{p}}$. Montrons que si $\tilde{w}'$ est une valuation de $\tilde{K}$ prolongeant $w_{\mathfrak{p}}$ alors $\tilde{w}'$ est égale à une des $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$. Si $\tilde{A}'$ est l'anneau de $\tilde{w}'$ alors $\tilde{A}' \cap K = A_{\mathfrak{p}} \supseteq A$, donc $\tilde{A}' \supseteq \bigcap_{i=1}^r \tilde{A}_i$, car $\tilde{A}'$ est intégralement fermé et contient donc l'anneau des entiers algébriques de $\tilde{K}$ sur A , égal à l'intersection des anneaux de valuation qui prolongent w à $\tilde{K}$. Or, par un résultat de KRULL [5], il existe un indice i tel que $\tilde{A}' \supseteq \tilde{A}_i$ et ainsi on a $\tilde{A}' = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}$, où $\tilde{\mathfrak{q}}_i$ est un idéal premier de $\tilde{A}_i$; or, de $A_{\mathfrak{p}} = \tilde{A}' \cap K = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}_i} \cap K$ il vient $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{q}}_i \cap A$ et alors $\tilde{\mathfrak{q}}_i = \tilde{\mathfrak{p}}_i$, donc $\tilde{A}' = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$.

Quant à la deuxième affirmation, il est clair que si $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$ alors $(\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$ donc $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ est un idéal premier de $(\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$, d'où $\tilde{\mathfrak{p}}_i \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}_j$ et de même $\tilde{\mathfrak{p}}_j \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}_i$, c.a.d. $\tilde{\mathfrak{p}}_i = \tilde{\mathfrak{p}}_j$, et réciproquement. Il est aussi clair que si $\tilde{\mathfrak{p}}_i \subseteq \tilde{A}_j$ alors $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ est un idéal premier de $\tilde{A}_j$, en vertu du lemme 3 de [1], car les valuations de $\tilde{K}$ qui prolongent w sont deux à deux incomparables selon la relation $\subseteq$. Donc, de $\tilde{\mathfrak{p}}_i \cap A = \mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}}_j \cap A = \mathfrak{p}$ et d'après l'univocité de $\tilde{\mathfrak{p}}_j$ dans $\tilde{A}_j$ avec cette propriété, on a $\tilde{\mathfrak{p}}_i = \tilde{\mathfrak{p}}_j$, donc $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$.

Soient maintenant $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ des idéaux premiers de l'anneau A de la valuation w de K , tels que $(0) \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}^0$. Pour tout indice i ($i = 1, \dots, r$) soient $\tilde{\mathfrak{p}}_i \subset \tilde{\mathfrak{p}}'_i$ les idéaux premiers correspondants de l'anneau $\tilde{A}_i$ de la valuation $\tilde{w}_i$ de $\tilde{K}$ qui prolonge w (où les valuations $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_r$ sont toutes distinctes), et notons $\tilde{\mathcal{K}}_i = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i/\tilde{\mathfrak{p}}'_i}$.

LEMME 9. Avec les notations ci-dessus, la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ de $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ admet le prolongements $(\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j, \tilde{\mathfrak{p}}'_j}$ à $\tilde{\mathcal{K}}_i$, où les indices j sont déterminés par la propriété que $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_i$. Pour qu'on ait $(\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j, \tilde{\mathfrak{p}}'_j} = (\tilde{w}_h)_{\tilde{\mathfrak{p}}_h, \tilde{\mathfrak{p}}'_h}$ (avec $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_h = \tilde{\mathfrak{p}}_i$) il faut et il suffit que $\tilde{\mathfrak{p}}'_j = \tilde{\mathfrak{p}}'_h$, c'est-à-dire $\tilde{\mathfrak{p}}'_j \subseteq \tilde{A}_h$, ou de même $\tilde{\mathfrak{p}}'_h \subseteq \tilde{A}_j$.

En effet, les valuations $(\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j, \tilde{\mathfrak{p}}'_j}$, avec $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_i$, prolongent la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ à $\tilde{\mathcal{K}}_i$.

Soit v' une valuation de $\tilde{\mathcal{K}}_i$ prolongeant la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ de $\mathcal{K}$ et notons B' son anneau de valuation. Si $\tilde{\varphi}_i: (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_i$, $\varphi: A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{K}$ désignent les homomorphismes canoniques de passage au quotient, de $B' \cap \tilde{\mathcal{K}} = A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}'$ il vient $B \cap A_{\mathfrak{p}} = \tilde{\varphi}_i^{-1}(B' \cap \tilde{\mathcal{K}}) = \tilde{\varphi}_i^{-1}(A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}') = A_{\mathfrak{p}'}$, où $B = \tilde{\varphi}_i^{-1}(B')$ est l'anneau d'une valuation v de $\tilde{K}$. D'après le théorème des valuations composées on a $B \subseteq (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$, c.a.d. $v \geq (\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$, car v' est une valuation du corps des restes $\tilde{\mathcal{K}}_i$ de $\tilde{K}$ selon $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$. Or, $B \cap K$ est l'anneau d'une valuation de K et on a $B \cap A_{\mathfrak{p}} = (B \cap K) \cap A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}'}$, donc de $A_{\mathfrak{p}'} \subset A_{\mathfrak{p}}$ et du corollaire 2 au th. 1 de [I], il résulte que $B \cap K = A_{\mathfrak{p}'}$, donc v prolonge $w_{\mathfrak{p}'}$. Par le lemme 8, on a $B = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}'_j} \subseteq (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$, pour un indice convenable j ; mais alors $(\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = ((\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}'_j})_{\tilde{\mathfrak{q}}_j} = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{q}}_j}$, où $\tilde{\mathfrak{q}}_j$ est un idéal premier de $\tilde{A}_j$ contenu dans $\tilde{\mathfrak{p}}'_j$; alors $\tilde{\mathfrak{q}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_i$ et de $\tilde{\mathfrak{p}}_i \cap A = \mathfrak{p}$ il vient $\tilde{\mathfrak{q}}_j \cap A = \mathfrak{p}$ donc $\tilde{\mathfrak{q}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_j$ (défini comme l'unique idéal premier de $\tilde{A}_j$ avec la propriété ci-dessus). Ainsi, $(\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j}$, $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_i$. De cela il résulte que l'anneau de la valuation v' est égal à $B/\tilde{\mathfrak{p}}_i = (\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}'_j}/\tilde{\mathfrak{p}}_j$, donc $v' = (\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j, \tilde{\mathfrak{p}}'_j}$.

Quant à la deuxième affirmation, il est clair que si $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_h = \tilde{\mathfrak{p}}_i$ et $\tilde{\mathfrak{p}}'_j = \tilde{\mathfrak{p}}'_h$ alors $(\tilde{w}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}_j, \tilde{\mathfrak{p}}'_j} = (\tilde{w}_h)_{\tilde{\mathfrak{p}}_h, \tilde{\mathfrak{p}}'_h}$. Réciproquement, si cela arrive alors $(\tilde{A}_j)_{\tilde{\mathfrak{p}}'_j}/\tilde{\mathfrak{p}}_j = (\tilde{A}_h)_{\tilde{\mathfrak{p}}'_h}/\tilde{\mathfrak{p}}_h$, de $\tilde{\mathfrak{p}}_j = \tilde{\mathfrak{p}}_h$ on déduit que $\tilde{\mathfrak{p}}'_h$ est un idéal premier de $\tilde{A}_j$ contenu dans $\tilde{\mathfrak{p}}'_j$, donc $\tilde{\mathfrak{p}}'_h = \tilde{\mathfrak{p}}'_j$.

Nous allons maintenant démontrer l'inégalité $n \geq \sum_{i=1}^r e_{i0} f_i^0$ entre les indices de ramification e_{i0} , les degrés d'inertie f_i^0 des r valuations qui prolongent une valuation donnée w (de rang quelconque) de K à un surcorps algébrique $\tilde{K}$ de K ayant degré n . Ensuite, nous nous occuperons de la question plus délicate de trouver des conditions suffisantes pour qu'on ait l'égalité.

Pour cela, revenons à la méthode de HASSE, indiquée au début de ce n^o, pour décrire les différents prolongements de w au surcorps algébrique $\tilde{K}|K$.

Tout d'abord démontrons directement un lemme qui pourrait être obtenu comme corollaire du th. 2.

LEMME 10. Avec ces hypothèses et les notations introduites, si $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$ est la restriction d'un $\tilde{K}$ -isomorphisme de $K_i^* \cdot \tilde{K}$ sur $K_j^* \cdot \tilde{K}$ alors les valuations $\tilde{w}_i = w^* \circ \varrho_i$ et $\tilde{w}_j = w^* \circ \varrho_j$ de $\tilde{K}$ coïncident.

En effet, soit η le $\hat{K}$ -isomorphisme de $K_i^* \cdot \hat{K}$ sur $K_j^* \cdot \hat{K}$ dont la restriction à K_i^* est égale à $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$. En vertu du lemme 4 on a $\tilde{w}_i(x) = \frac{1}{[K_i^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}(N_{K_i^* \hat{K} | \hat{K}}(\varrho_i(x)))$ et de même $\tilde{w}_j(x) = \frac{1}{[K_j^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}(N_{K_j^* \hat{K} | \hat{K}}(\varrho_j(x)))$ pour tout $x \in \hat{K}$, car la valuation $\hat{w}$ admet prolongement unique à toute extension algébrique de $\hat{K}$. Or, par l'hypothèse on a $[K_j^* \cdot \hat{K} : \hat{K}] = [K_i^* \cdot \hat{K} : \hat{K}]$ et $N_{K_j^* \hat{K} | \hat{K}} \circ \eta = N_{K_i^* \hat{K} | \hat{K}}$, donc $\tilde{w}_j(x) = \frac{1}{[K_j^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}(N_{K_i^* \hat{K} | \hat{K}}(\varrho_j(x))) = \frac{1}{[K_j^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}(N_{K_j^* \hat{K} | \hat{K}}(\varrho_j \circ \varrho_i^{-1} \circ \varrho_i(x))) = \frac{1}{[K_j^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}(N_{K_i^* \hat{K} | \hat{K}}(\eta \circ \varrho_i(x))) = \frac{1}{[K_i^* \hat{K} : \hat{K}]} \hat{w}(N_{K_i^* \hat{K} | \hat{K}}(\varrho_i(x))) = \tilde{w}_i(x)$.

THÉORÈME 3. Soit K un corps, muni de la valuation w , soit $\tilde{K} | K$ un sur-corps algébrique de degré n et $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ les prolongements distincts de w à $\tilde{K}$. Alors $n \geq \sum_{i=1}^r e_{i0} \cdot f_i^0$, où e_{i0}, f_i^0 , désignent resp. l'indice de ramification et le degré d'inertie de la valuation $\tilde{w}_i$ de l'extension $\tilde{K} | K$ (pour $i=1, \dots, r$).

DÉMONSTRATION. Numérotions les m K -isomorphismes ϱ_i de $\tilde{K}$ dans K_0^* , de façon que si $K_i^* = \varrho_i(\tilde{K})$, alors $K_1^* \hat{K}, \dots, K_s^* \hat{K}$ soient tels qu'il n'existe entre eux aucun $\hat{K}$ -isomorphisme dont la restriction soit du type $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$, et que cet ensemble soit maximal avec cette propriété; en outre, supposons que $\varrho_1, \dots, \varrho_r$ soient tels que $\tilde{w}_1 = w^* \circ \varrho_1, \dots, \tilde{w}_r = w^* \circ \varrho_r$, soient les prolongements distincts de w ; par le lemme 10 on a $r \leq s$.

Supposons d'abord que $\tilde{K} | K$ soit une extension séparable, donc il existe un élément primitif $t \in \tilde{K}$, c.a.d. $\tilde{K} = K(t)$; soit $f \in K[x]$ le polynôme minimal de t sur K , donc f possède degré $n = [\tilde{K} : K]$. Considérons la décomposition de f en facteurs irréductibles sur $\hat{K}$: $f = f_1 \dots f_s$, où $f_i \in \hat{K}[X]$ et n_i désigne le degré de f_i ($i=1, \dots, s$). Pour tout $i=1, \dots, m$, on a $K_i^* = \varrho_i(\tilde{K}) = K(\varrho_i(t))$ donc $K_i^* \cdot \hat{K} = \hat{K}(\varrho_i(t))$, et alors $[K_i^* \cdot \hat{K} : \hat{K}] = n_i$ si et seulement si $\varrho_i(t)$ est racine du polynôme f_x irréductible sur $\hat{K}$. Enfin, il existe un $\hat{K}$ -isomorphisme entre deux corps $K_i^* \cdot \hat{K}$ et $K_j^* \cdot \hat{K}$ prologéant $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$ si et seulement si $\varrho_i(t), \varrho_j(t)$ sont racines d'un même polynôme f_x , irréductible sur $\hat{K}$. Donc $s' = s$ et alors $n = \sum_{x=1}^{s'} n_x = \sum_{x=1}^s n_x$.

Si par contre $\tilde{K} | K$ n'est pas nécessairement séparable, soit $\tilde{K}'$ la plus grande extension séparable de K contenue dans $\tilde{K}$; soit p la caractéristique de K , donc $[\tilde{K} : \tilde{K}']$ est une puissance p^h . Soient $\varrho'_1, \dots, \varrho'_m$ les K -isomorphismes de $\tilde{K}'$ dans K_0^* ; chaque ϱ'_i admet un prolongement unique ϱ_i à l'extension purement inséparable $\tilde{K} | \tilde{K}'$, donc $m' \leq m$, $K_x'^* = \varrho_x'(\tilde{K}')$ est la plus grande extension séparable de K contenue dans $K_x^* = \varrho_x(\tilde{K})$ et on a $p^h = [\tilde{K} : \tilde{K}'] = [K_x^* : K_x'^*] \geq [K_x^* \cdot \hat{K} : K_x'^* \cdot \hat{K}]$. Donc $n = [\tilde{K} : K] = [\tilde{K} : \tilde{K}'] \cdot [\tilde{K}' : K] = p^h \cdot \sum_{x=1}^{s'} n'_x = \sum_{x=1}^s p^h \cdot n'_x \geq \sum_{x=1}^s [K_x^* \cdot \hat{K} : K_x'^* \cdot \hat{K}] \cdot [K_x'^* \cdot \hat{K} : \hat{K}] = \sum_{x=1}^s [K_x^* \cdot \hat{K} : \hat{K}] = \sum_{x=1}^s n_x$.

Or, puisque $s \geq r$ alors $n \geq \sum_{\kappa=1}^s n_{\kappa} \geq \sum_{\kappa=1}^r n_{\kappa}$.

Enfin, le groupe de valeurs $\hat{\Gamma}$ de la valuation $\hat{w}$ de $\hat{K}$ possède indice fini dans $\hat{\Gamma}_i^* = w^*(K_i^* \cdot \hat{K})$, car $K_i^* \cdot \hat{K} | \hat{K}$ est une extension algébrique; or, de $\hat{\Gamma} = \Gamma \subseteq \hat{\Gamma}_i^* = w^*(K_i^*) \subseteq w^*(K_i^* \cdot \hat{K}) = \hat{\Gamma}_i^*$, il résulte que $(\hat{\Gamma}_i^* : \hat{\Gamma}) = \hat{e}_i \geq e_i = (\Gamma_i^* : \Gamma)$. De même, le corps des restes $\hat{\mathcal{K}}_i^{*0}$ de $K_i^* \cdot \hat{K}$ selon w^* est une extension algébrique finie du corps des restes $\hat{\mathcal{K}}^0$ de $\hat{K}$ selon $\hat{w}$; or $\hat{\mathcal{K}}^0 = \mathcal{K}^0$ (corps des restes de K selon w) et le corps des restes $\mathcal{K}_i^{*0} = \hat{\mathcal{K}}_i^{*0}$ de K_i^* selon w^* étant tel que $\mathcal{K}^0 = \hat{\mathcal{K}}^0 \subseteq \hat{\mathcal{K}}_i^{*0} \subseteq \mathcal{K}_i^{*0}$ il résulte que $[\mathcal{K}_i^{*0} : \mathcal{K}^0] = f_i^0 \leq \hat{f}_i^0 = [\hat{\mathcal{K}}_i^{*0} : \hat{\mathcal{K}}^0]$.

Or, puisque $n_i \geq \hat{e}_{i0} \cdot \hat{f}_i^0$ pour tout indice $i = 1, \dots, r$, par le lemme 2 alors $n \geq \sum_{i=1}^r n_i \geq \sum_{i=1}^r \hat{e}_{i0} \cdot \hat{f}_i^0 \geq \sum_{i=1}^r e_{i0} \cdot f_i^0$.

Nous donnerons maintenant des conditions suffisantes pour qu'on ait l'égalité dans la relation ci-dessus.

THÉORÈME 4. Soit K un corps muni de la valuation discrète w de rang fini et $\hat{K} | K$ une extension algébrique ayant degré n . Soient $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ ($r \geq 1$) les différents prolongements de w à $\hat{K}$ et pour chaque indice $i = 1, \dots, r$, notons e_{i0} , f_i^0 resp. les degrés de ramification et d'inertie de $\tilde{w}_i$ sur w . Si pour tout idéal premier non maximal $\mathfrak{p}$ de l'anneau A de w (aussi pour $\mathfrak{p} = (0)$) et pour tout indice $i = 1, \dots, r$, l'extension (algébrique) $\hat{\mathcal{K}}_i | \mathcal{K}$ est séparable (aussi $\hat{K} | K$ est séparable) alors on a $n = \sum_{i=1}^r e_{i0} \cdot f_i^0$.

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait par induction sur le rang de w .

Supposons que w possède rang 1. Soit $\hat{K}$, muni de $\hat{w}$, le complété du corps valué K . Puisque w est discrète, alors $\hat{K}$, $\hat{w}$, est un corps valué maximal (cf. SCHILLING [6]). On détermine les prolongements distincts $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ de w à $\hat{K}$ selon le schéma de HASSE déjà indiqué. Par le lemme 7, si $\varrho_1, \dots, \varrho_m$ sont les K -isomorphismes de $\hat{K}$ dans K_0^* alors $\tilde{w}_i = w^* \circ \varrho_i = w^* \circ \varrho_j = \tilde{w}_j$ si et seulement si $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$ est la restriction d'un $\hat{K}$ -isomorphisme de $\hat{K}_i \cdot \hat{K}$ sur $\hat{K}_j \cdot \hat{K}$, donc le nombre r de valuations distinctes qui prolongent w à $\hat{K}$ est égal au nombre maximum s de corps $\hat{K}_i \cdot \hat{K}$, $\hat{K}_j \cdot \hat{K}$ entre lesquels il n'y a pas de $\hat{K}$ -isomorphisme prolongeant $\varrho_j \circ \varrho_i^{-1}$. Or, $\hat{K} | K$ étant séparable, on a $n = \sum_{i=1}^s n_i = \sum_{i=1}^r n_i$ et $\hat{K}$ étant maximal, alors $n_i = e_{i0} \cdot f_i^0$ (pour $i = 1, \dots, r$), par le lemme 5, donc $n = \sum_{i=1}^r e_{i0} \cdot f_i^0$.

Supposons maintenant que w possède rang strictement supérieur à 1 et que le théorème soit déjà démontré pour les valuations ayant rang strictement inférieur à celui de w . Nous allons faire une deuxième induction sur la longueur l de l'arbre engendré par les prolongements distincts $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ de w à $\hat{K}$.

Ceci étant, passons à la démonstration du théorème, dans le cas où $l = 1$, donc nécessairement $r = 1$. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier minimal de A ; alors $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^0$ car le rang de w est plus grand que 1. Soit $\tilde{\mathfrak{p}}$ le correspondant idéal premier

de l'anneau $\tilde{A}$ de l'unique prolongement $\tilde{w}$ de w à $\tilde{K}$, et notons Δ , $\tilde{\Delta}$, les sous-groupes isolés des groupes de valeurs Γ , $\tilde{\Gamma}$, qui correspondent à $\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}}$. Par le lemme 3, la valuation discrète $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$ de $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ admet un prolongement unique $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}^0}$ à l'extension algébrique séparable $\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{K}$; puisque $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$ possède groupe de valeurs Δ , son rang est strictement inférieur à celui de w , donc $f = [\tilde{\mathcal{K}} : \mathcal{K}] = (\tilde{\Delta} : \Delta) \cdot [\tilde{\mathcal{K}}^0 : \mathcal{K}^0] = e \cdot f^0$ (car l'hypothèse de séparabilité est encore vérifiée pour la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$). D'autre part, la valuation discrète de rang 1 $w_{\mathfrak{p}}$ de K admet un prolongement unique (lemme 3) $\tilde{w}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ à $\tilde{K}$ et alors on a aussi $n = [\tilde{K} : K] = (\tilde{\Gamma} / \tilde{\Delta} : \Gamma / \Delta) \cdot [\tilde{\mathcal{K}} : \mathcal{K}] = \frac{(\tilde{\Gamma} : \Gamma)}{(\tilde{\Delta} : \Delta)} [\tilde{\mathcal{K}} : \mathcal{K}] = \frac{e_0}{e} \cdot f = e_0 \cdot f^0$.

Soit maintenant $l=2$ et supposons d'abord que les valuations prolongées $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ soient deux à deux indépendantes. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A , donc $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^0$. Pour chaque valuation $\tilde{w}_i$ d'anneau $\tilde{A}_i$, soit $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ le correspondant idéal premier. Notons Δ , $\tilde{\Delta}_i$ resp. les sous-groupes isolés correspondants à $\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}}_i$. Les valuations deux à deux indépendantes, donc distinctes $(\tilde{w}_1)_{\tilde{\mathfrak{p}}_1}, \dots, (\tilde{w}_r)_{\tilde{\mathfrak{p}}_r}$ sont les prolongements de $w_{\mathfrak{p}}$ à $\tilde{K}$ (lemme 8). Par l'induction (puisque $w_{\mathfrak{p}}$ est discrète et vérifie la condition de séparabilité de l'énoncé) alors $n = [\tilde{K} : K] = \sum_{i=1}^r (\tilde{\Gamma}_i / \tilde{\Delta}_i : \Gamma / \Delta) \cdot [\tilde{\mathcal{K}}_i : \mathcal{K}] = \sum_{i=1}^r (e_{i0}/e_i) \cdot f_i$. Or, pour chaque indice $i=1, \dots, r$, la valuation discrète $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$ de $\mathcal{K}$ admet un prolongement unique $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}_i, \tilde{\mathfrak{p}}_i^0}$ au corps $\tilde{\mathcal{K}}_i$ (lemme 9); puisque $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$ possède rang strictement inférieur à celui de w et satisfait la condition de séparabilité de l'énoncé, alors $f_i = [\tilde{\mathcal{K}}_i : \mathcal{K}] = (\tilde{\Delta}_i : \Delta) \cdot [\tilde{\mathcal{K}}_i^0 : \mathcal{K}^0] = e_i \cdot f_i^0$ pour tout indice $i=1, \dots, r$. Donc $n = \sum_{i=1}^r (e_{i0}/e_i) \cdot f_i = \sum_{i=1}^r e_{i0} \cdot f_i^0$.

Si par contre les valuations $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ ne sont pas deux à deux indépendantes, alors $\tilde{A}_i \cdot \tilde{A}_j = \tilde{B} \neq \tilde{K}$ quelque soit $i \neq j$; soit $\tilde{v}$ la valuation dont $\tilde{B}$ est l'anneau et notons $\tilde{\mathfrak{p}}$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_r$, donc $\tilde{\mathfrak{p}} \neq (0)$ et $\tilde{\mathfrak{p}}$ est l'idéal maximal de $\tilde{B}$; soit $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap A$, donc $\mathfrak{p} \neq (0)$ et $\mathfrak{p}$ n'est pas l'idéal maximal de A . Pour tout indice $i=1, \dots, r$, soit $\tilde{\Delta}_i$ le sous-groupe isolé de $\tilde{\Gamma}_i$ qui correspond à $\tilde{\mathfrak{p}}$ et $\tilde{\mathfrak{Q}} = \tilde{B}/\tilde{\mathfrak{p}} = (\tilde{A}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}}/\tilde{\mathfrak{p}}$ (pour tout indice i) est une extension algébrique finie de $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, ayant degré $f = [\tilde{\mathfrak{Q}} : \mathcal{K}]$. Les seuls prolongements de $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$ au corps $\tilde{\mathfrak{Q}}$ sont $(\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}^0}$ ($i=1, \dots, r$), lesquels sont deux à deux indépendants, car $l=2$. Alors $f = [\tilde{\mathfrak{Q}} : \mathcal{K}] = \sum_{i=1}^r (\tilde{\Delta}_i : \Delta) \cdot [\tilde{\mathcal{K}}_i^0 : \mathcal{K}^0] = \sum_{i=1}^r e_i \cdot f_i^0$. Or, d'autre part $\tilde{v} = (\tilde{w}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ (quelque soit $i=1, \dots, r$) est l'unique prolongement de $w_{\mathfrak{p}}$ au corps $\tilde{K}$. Ainsi, l'arbre engendré par les prolongements de $w_{\mathfrak{p}}$ possède longueur 1, et par induction on a nécessairement $n = [\tilde{K} : K] = (\tilde{\Gamma}_i / \tilde{\Delta}_i : \Gamma / \Delta) \cdot [\tilde{\mathfrak{Q}} : \mathcal{K}] = (e_{i0}/e_i) \cdot f$ quelque soit $i=1, \dots, r$. Ainsi $n = (e_{i0}/e_i) \cdot \sum_{j=1}^r e_j \cdot f_j^0 = \sum_{j=1}^r e_{j0} \cdot f_j^0$.

Supposons le théorème vrai lorsque l'arbre engendré par les prolongements $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ possède longueur strictement inférieure à l (où $l > 2$).

Soit $\tilde{u}$ la valuation de $\tilde{K}$ égale à la borne inférieure des prolongements de la valuation donnée, $\tilde{u} = \tilde{w}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{w}_r$ ($\tilde{u}$ peut être aussi la valuation triviale de $\tilde{K}$), donc $\tilde{u}$ est le premier élément de l'arbre $\mathcal{A}$ engendré par l'ensemble $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r\}$; notons $\tilde{C}$ l'anneau de la valuation $\tilde{u}$. Soient, de même, $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s$ les valuations de $\tilde{K}$ qui sont les éléments minimaux distincts de $\tilde{u}$ dans l'arbre $\mathcal{A}$ (donc $s \geq 2$), et notons $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_s$ leurs respectifs anneaux de valuation. Numérotons ensuite les valuations $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r$ de façon que pour tout indice $i = 1, \dots, s$ les valuations $\tilde{w}_{i1}, \tilde{w}_{i2}, \dots, \tilde{w}_{ir_i}$ soient exactement celles plus fines que $\tilde{v}_i$. Notons $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{\mathfrak{p}}_{ij}^0$, $\tilde{I}_{ij}$ resp. l'anneau, l'idéal maximal et le groupe de valeurs de $\tilde{w}_{ij}$. Pour tout indice $i = 1, \dots, s$, soit $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux de valuation $\tilde{A}_{ij}$ ($j = 1, \dots, r_i$), donc $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ est l'idéal maximal de $\tilde{B}_i$; dans chaque groupe $\tilde{I}_{ij}$ soit $\tilde{\Delta}_{ij}$ le sous-groupe isolé correspondant à $\tilde{\mathfrak{p}}_i$; on a alors $\tilde{B}_i = \tilde{A}_{i1} \cdot \tilde{A}_{i2} \dots \tilde{A}_{ir_i} = (\tilde{A}_{ij})_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$ (pour j quelconque) et le groupe de valeurs de $\tilde{v}_i$ est $\tilde{\Xi}_i \cong \tilde{I}_{ij} / \tilde{\Delta}_{ij}$ (pour j quelconque). De même, si $\tilde{\mathfrak{q}}$ désigne le plus grand idéal premier commun aux anneaux $\tilde{A}_{ij}$ (i, j quelconques) alors pour tout indice i on a $\tilde{\mathfrak{q}} \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}_i$, $\tilde{C} = (\tilde{B}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}} = (\tilde{A}_{ij})_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ (i, j quelconques), $\tilde{\mathfrak{q}}$ est l'idéal maximal de $\tilde{C}$, et si $\tilde{\Delta}_{ij}$ est le sous groupe isolé de $\tilde{I}_{ij}$ qui correspond à l'idéal premier $\tilde{\mathfrak{q}}$ alors le groupe de valeurs de $\tilde{u}$ s'écrit $\tilde{\Theta} = \tilde{I}_{ij} / \tilde{\Delta}_{ij}$ (i, j quelconques). Notons aussi $\mathfrak{p}^0 = \tilde{\mathfrak{p}}_{ij}^0 \cap A$ (idéal maximal de A), $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}}_i \cap A$, $\mathfrak{q} = \tilde{\mathfrak{q}} \cap A$, $\mathcal{K}_{ij}^0 = \tilde{A}_{ij} / \tilde{\mathfrak{p}}_{ij}^0$, $\mathcal{K}_i = \tilde{B}_i / \tilde{\mathfrak{p}}_i = (\tilde{A}_{ij})_{\tilde{\mathfrak{p}}_i} / \tilde{\mathfrak{p}}_i$ (j quelconque), $\tilde{\mathcal{Q}} = \tilde{C} / \tilde{\mathfrak{q}} = (\tilde{B}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}} / \tilde{\mathfrak{q}} = (\tilde{A}_{ij})_{\tilde{\mathfrak{q}}} / \tilde{\mathfrak{q}}$ (i, j quelconques), $\mathcal{K}^0 = A / \mathfrak{p}^0$, $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}$, $\mathcal{Q} = A_{\mathfrak{q}} / \mathfrak{q}$.

Pour tout indice $i = 1, \dots, s$ le corps $\tilde{\mathcal{K}}_i$ est une extension algébrique de $\mathcal{K}$, ayant degré f_i , et les prolongements distincts de $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$ de $\mathcal{K}$ à $\tilde{\mathcal{K}}_i$ sont $(\tilde{w}_{ij})_{\tilde{\mathfrak{p}}_i, \tilde{\mathfrak{p}}_{ij}^0}$ ($j = 1, \dots, r_i$), en vertu du lemme 9. Puisque $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$ possède rang strictement inférieur à celui de w , alors par l'induction on a $f_i = [\tilde{\mathcal{K}}_i : \mathcal{K}] = \sum_{j=1}^{r_i} (\tilde{\Delta}_{ij} : \Delta) \cdot [\tilde{\mathcal{K}}_{ij}^0 : \mathcal{K}^0] = \sum_{j=1}^{r_i} e_{ij}(\mathfrak{p}) \cdot f_{ij}^0$, où $e_{ij}(\mathfrak{p}) = (\tilde{\Delta}_{ij} : \Delta)$, $f_{ij}^0 = [\tilde{\mathcal{K}}_{ij}^0 : \mathcal{K}^0]$ et Δ est le sous-groupe isolé de Γ qui correspond à l'idéal premier $\mathfrak{p}$.

Le corps $\tilde{\mathcal{Q}}$ est une extension algébrique de $\mathcal{Q}$ ayant degré f . Les prolongements distincts de $w_{\mathfrak{q}, \mathfrak{p}}$ à $\tilde{\mathcal{Q}}$ sont exactement les valuations $(\tilde{v}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{p}}_i}$ ($i = 1, \dots, s$), en vertu du lemme 9. Puisque le groupe de valeurs de $w_{\mathfrak{q}, \mathfrak{p}}$ est isomorphe à A / Δ et ainsi discret, et puisque les valuations $(\tilde{v}_i)_{\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{p}}_i}$ de $\tilde{\mathcal{Q}}$ sont deux à deux indépendantes, alors par l'induction il résulte que $f = [\tilde{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q}] = \sum_{i=1}^s (\tilde{\Delta}_{ij} / \tilde{\Delta}_{ij} : A / \Delta) \cdot [\tilde{\mathcal{K}}_i : \mathcal{K}]$, où $\tilde{\Delta}_{ij} / \tilde{\Delta}_{ij}$ est le sous-groupe isolé de $\tilde{\Xi}_i \cong \tilde{I}_{ij} / \tilde{\Delta}_{ij}$ qui correspond à l'idéal premier $\tilde{\mathfrak{q}}$ (j quelconque); de $(\tilde{\Delta}_{ij} / \tilde{\Delta}_{ij} : A / \Delta) = \frac{(\tilde{\Delta}_{ij} : \Delta)}{(\tilde{\Delta}_{ij} : \Delta)}$ $\frac{e_{ij}(\mathfrak{q})}{e_{ij}(\mathfrak{p})}$ il résulte que $f = \sum_{i=1}^s \frac{e_{ij}(\mathfrak{q})}{e_{ij}(\mathfrak{p})} \cdot f_i$ (j quelconque).

Enfin, la valuation discrète w_q de K admet un prolongement unique $\tilde{u} = (\tilde{v}_i)_q = (\tilde{w}_{ij})_q$ (i, j quelconques) à $\tilde{K}$. Alors, par l'induction, on déduit que $n = [\tilde{K}:K] = (\tilde{\Gamma}_{ij}/\tilde{\Lambda}_{ij}:\Gamma/\Lambda) \cdot [\tilde{\mathcal{Q}}:\mathcal{Q}] = \frac{e_{ij}(0)}{e_{ij}(q)} \cdot f$ (i, j quelconques). Ainsi, on a

$$n = \frac{e_{ij}(0)}{e_{ij}(q)} \cdot \sum_{h=1}^s \frac{e_{hk}(q)}{e_{hk}(p)} \cdot f_h = \sum_{i=1}^s \frac{e_{ij}(0)}{e_{ij}(p)} \cdot f_i = \sum_{i=1}^s \frac{e_{ij}(0)}{e_{ij}(p)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{r_i} e_{ik}(p) \cdot f_{ik}^0 \right) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} e_{ij}(0) \cdot f_{ij}^0, \text{ car } i, j \text{ étaient quelconques. Cela termine la démonstration du théorème.}$$

Bibliographie

- [1] RIBENBOIM, P.: Le Théorème d'Approximation pour les Valuations de Krull. *Math. Z.* **68**, 1—18 (1957).
- [2] RIBENBOIM, P.: Corps Maximaux et Complets par des Valuations de Krull. *Math. Z.* **69**, 466—479 (1958).
- [3] COHEN, I. S., et O. ZARISKI: A Fundamental Inequality in the Theory of Extensions of Valuations. *Illinois J. of Math.* **1**, 1—8 (1957).
- [4] ROQUETTE, P.: On the Prolongation of Valuations. *Trans. A.M.S.* **88**, 42—56 (1958).
- [5] KRULL, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. *J. reine angew. Math.* **167**, 160—196 (1932).
- [6] SCHILLING, O. F. G.: *Valuation Theory*. Amer. Math. Soc., New York, 1950.
- [7] HASSE, H.: *Zahlentheorie*. Berlin: Akademie Verlag 1949.
- [8] BOURBAKI, N.: *Algèbre*, chap. V. Paris: Hermann & Cie. 1953.
- [9] RIBENBOIM, P.: Sobre a Teoria das Valorizações de Krull. *Boletim da Soc. Mat. São Paulo* **11** (à paraître).

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (Brasil)

(Eingegangen am 13. Februar 1960)

Linear Programming in Industry

Theory and Applications

An Introduction

By SVEN DANØ,

Assistant Professor of Economics, University of Copenhagen

Mit 6 Abbildungen. VIII, 120 Seiten Gr.-8°. 1960. DM 20,—

(In englischer Sprache)

CONTENTS

Introduction: Planning Company Operations: The General Problem. Linear Planning Models. A Simple Example · Elements of the Mathematical Theory of Linear Programming: The Fundamental Theorem. The Simplex Method and the Simplex Criterion · A Practical Example · Linear Models of Production and Economic Optimization: The Linear Production Model. Profit Maximization and Cost Minimization. The Basic Assumptions of Linear Programming · Industrial Applications: Blending Problems. Optimal Utilization of Machine Capacities. Inventory Problems. Transportation Problems · Computational Procedures for Solving Linear Programming Problems: The Simplex Method. The Simplex Tableau. Alternate Optima and Second-Best Solutions. Computational Short Cuts. The Case of Degeneracy. Procedure for Solving Transportation Problems · Duality in Linear Programming: The Duality Theorem. Economic Interpretation of the Dual · The Effects of Coefficient Variations on the Solution: Parametric Programming. A Concrete Example · The Applicability of Linear Programming in Industry: Linear Programming and Investment Decisions. The Scheduling Problem. Linear Programming versus "Common-Sense" Methods · Appendix: Proof of the Fundamental Theorem. The Simplex Criterion. The Simplex Algorithm. Proof of the Duality Theorem · Numerical Exercises ·

Bibliography · Index.

SPRINGER-VERLAG · WIEN



Vor kurzem erschien :

Ludwig Prandtl

Gesammelte Abhandlungen

zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik

Herausgegeben im Auftrage der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt und der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik

Von WALTER TOLLMIE, Göttingen · HERMANN SCHLICHTING, Göttingen
HENRY GÖRTLER, Freiburg i. Br.

Schriftleitung: F. W. RIEGELS, Göttingen

In 3 Teilen mit einem Porträt und 1003 Abbildungen.

Teil I: XX, 574 Seiten; Teil II: XIV, 496 Seiten; Teil III: XIV, 550 Seiten Gr.-8°. 1961.
DM 273,—; Ganzleinen DM 288,—

ZUR INFORMATION

Die vorliegenden drei Teile enthalten das Lebenswerk von LUDWIG PRANDTL. Es sind darin 133 Originalveröffentlichungen Prandtls wieder abgedruckt worden. Diese sind in neun fachlich zusammengefaßten Kapiteln zeitlich geordnet und spiegeln damit im klaren Stil des großen Gelehrten die Entwicklung mehrerer wissenschaftlicher Fachdisziplinen in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts. Die einzelnen Kapitel behandeln die meist grundlegenden Beiträge LUDWIG PRANDTLs zu folgenden Teilgebieten der Mechanik: Elastizität, Plastizität und Rheologie, Tragflügeltheorie, Grenzschichten, Theorie des Widerstandes, Turbulenz und Wirbelbildung, Gasdynamik, meteorologische Anwendungen der Strömungslehre und Modellversuchswesen. Das letztgenannte Kapitel enthält auch eingehende Angaben zur Geschichte der Göttinger Windkanäle.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG